



16-T. 31



B. Prov.

I

1990

ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE.

Tout exemplaire, non revêtu de la signature de l'auteur
et de celle des éditeurs, sera réputé contrefait.

1, c. Herobry, E. Magdeleine et cie

608190

ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE

PAR
E. LIONNET

Professeur de Mathématiques au Collège royal Louis-le-Grand,
Examineur suppléant d'admission à l'École Navale.

TROISIÈME ÉDITION.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'UNIVERSITÉ
POUR L'USAGE DES COLLÈGES.



PARIS
DEZOBRY, E. MAGDELEINE ET C^{ie}
RUE DES MAÇONS-SORBONNE, 1

1846

001802



DIVISION DE L'OUVRAGE.

PRINCIPES

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE I.

LA LIGNE DROITE.

LIVRE II.

LA LIGNE BRISÉE ET LES POLYGONES.

LIVRE III.

LA CIRCONFÉRENCE ET LE CERCLE.

LIVRE IV.

LES POLYGONES SEMBLABLES
ET LA MESURE DES ANGLES.

LIVRE V.

LA MESURE DES POLYGONES.

LIVRE VI.

LES POLYGONES RÉGULIERS
ET LA MESURE DU CERCLE.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

LIVRE I.

LE PLAN.

LIVRE II.

LES ANGLES SOLIDES ET LES POLYÈDRES.

LIVRE III.

LES TROIS CORPS RONDS.

LIVRE IV.

LES POLYÈDRES SEMBLABLES
ET LA MESURE DES ANGLES.

LIVRE V.

LA MESURE DES POLYÈDRES.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES RÉGULIERS
ET LA MESURE DES TROIS CORPS RONDS.

ERRATA.

Pages Lignes

- 37, 3, *au lieu de* angles opposés à des côtés, *lisez* : côtés opposés à des angles.
- 98, 24, *id.* — EF, *lisez* : EF.
- 105, 18, *id.* :: BO, *id.* : BO.
- 193, 26, *id.* angles sont, *id.* angles solides sont.
- 202, 44, *id.* $n-3$, *id.* $2n-3$.
- 254, 19, *id.* 28, *id.* 29.
- 270, 17, *id.* d'intersection, *id.* de rencontre.
- 334, 10, *ajoutez* : terminée au même contour.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

PRINCIPES.



DÉFINITIONS.

1. Une portion de l'espace, terminée de toutes parts, se nomme *solide* ou *corps*.

2. Ce qui termine un corps est une *surface*.

3. Ce qui termine une surface est une *ligne*.

4. Les extrémités d'une ligne sont des *points*.

REMARQUE. La surface, la ligne et le point se conçoivent indépendamment du corps.

5. Les solides, les surfaces et les lignes se désignent sous le nom commun de *figures*.

6. La *Géométrie* est la science des figures.

7. Deux figures *coïncident*, quand elles se confondent dans tous leurs points.

8. Deux figures *égales* sont deux figures susceptibles de coïncider.

9. Deux figures *équivalentes* sont deux figures qui ont la même étendue.

REMARQUE. Deux figures égales sont équivalentes ; mais deux figures équivalentes peuvent ne pas être égales. On conçoit, par exemple, que les lignes AB, CD, qui ne sont point susceptibles de coïncider, aient la même étendue.



10. La *direction* d'une ligne droite est cette ligne elle-même, qu'on suppose prolongée indéfiniment dans les deux sens.

REMARQUE. Tout le monde a l'idée de la ligne droite : il est inutile et d'ailleurs impossible de la définir.

Lorsqu'il sera question d'une ligne droite, on la supposera toujours prolongée indéfiniment dans les deux sens, à moins qu'on n'exprime le contraire.

11. La ligne *brisée* est une ligne composée de plusieurs droites, non situées dans la même direction.

12. La ligne *courbe* est une ligne qui n'est droite dans aucune partie de son étendue.

13. Le *plan* est une surface indéfinie, telle que, si l'on prend deux points quelconques sur cette surface, et qu'on fasse passer une ligne droite par ces deux points, cette ligne sera tout entière dans la surface.

14. Une figure est *plane*, lorsqu'elle a tous ses points dans un même plan.

15. Le *contour* ou *périmètre* d'une surface plane est la ligne qui termine la surface de toutes parts.

16. La surface *brisée* est une surface composée de plusieurs surfaces planes, non situées dans un même plan.

17. La surface *courbe* est une surface qui n'est plane dans aucune partie de son étendue.

18. On nomme *géométrie plane* la partie de la géométrie relative aux figures planes, et *géométrie de l'espace* celle qui traite des figures dont tous les points ne sont pas dans un même plan.

19. Le *cercle* est une surface plane dans laquelle est un point tel que toutes les droites, menées de ce point au contour de la surface, sont égales entre elles. Ce point est le *centre* du cercle.

20. Le contour d'un cercle s'appelle *circonférence*.

REMARQUE. Quelquefois la circonférence se désigne aussi sous le nom de cercle.

21. Toute droite menée du centre à la circonférence se nomme *rayon*.

REMARQUE. En vertu de la définition du cercle, tous les rayons d'un même cercle sont égaux entre eux.

22. La *sphère* est un solide dans lequel est un point tel que toutes les droites, menées de ce point à la surface du solide, sont égales entre elles. Ce point est le *centre* de la sphère.

REMARQUE. Quelquefois la surface de la sphère se désigne aussi sous le nom de sphère.

23. Toute droite menée du centre à la surface de la sphère est un *rayon*.

REMARQUE. En vertu de la définition de la sphère, tous les rayons d'une même sphère sont égaux entre eux.

24. Deux cercles ou deux sphères, qui ont le même centre, sont *concentriques*.

AXIOMES.

1. *Par deux points donnés, on peut faire passer une ligne droite.*

2. *Deux lignes droites, qui ont deux points communs, coïncident dans toute leur étendue et ne forment qu'une seule et même ligne droite.*

3. *Par trois points donnés, non en ligne droite, on peut faire passer un plan.*

4. *Lorsqu'une droite finie est située dans une surface plane, chacun de ses prolongements rencontre le contour de la surface au moins en un point.*

5. *Lorsqu'une droite finie est située dans un solide, chacun de ses prolongements rencontre la surface du solide au moins en un point.*

6. *Deux lignes droites, qui ont un seul point commun, se coupent mutuellement en ce point.*

7. Lorsqu'une ligne droite et un plan ont un seul point commun, le plan coupe la droite en ce point.

8. Toute ligne qui, étant dans un même plan avec une droite indéfinie, a ses extrémités situées de différents côtés de cette droite, la rencontre au moins en un point.

9. Toute ligne, qui a ses extrémités situées de différents côtés d'un plan, rencontre ce plan au moins en un point.

10. Toute ligne qui, étant dans un même plan avec une surface, a ses extrémités situées l'une dans la surface et l'autre en dehors, rencontre son contour au moins en un point.

11. Toute ligne, qui a ses extrémités situées l'une dans un solide et l'autre en dehors, rencontre la surface du solide au moins en un point.

12. Une ligne droite est plus courte que toute autre ligne qui a les mêmes extrémités.

13. Une surface plane est moindre que toute autre surface terminée au même contour.

THÉORÈME PREMIER.

Deux plans P et Q, qui ont trois points communs A, B, C non en ligne droite, coïncident dans toute leur étendue et ne forment qu'un seul et même plan.



Menons les droites AB, AC. Chacune de ces lignes, ayant deux de ses points dans chacun des deux plans P et Q, y sera située tout entière (déf. 13); je dis de plus que tout autre point L du plan P appartient au plan Q. Car soit M un point de AB, situé, par rapport au point E, de l'autre côté de AC; si l'on joint les deux points L et M par une ligne droite, cette ligne sera tout entière dans le

plan P, et rencontrera AC en un point N (ax. 8). La droite LM aura ainsi deux points M et N dans le plan Q; donc elle sera située tout entière dans ce plan, et le point L de cette même droite appartiendra au plan Q. Donc les deux plans P et Q se confondent dans toute leur étendue et ne forment qu'un seul et même plan.

THÉORÈME II.

Par une droite AB et un point C situé hors de cette droite, on peut faire passer un plan.

 Car, si l'on prend deux points quelconques A et B sur la droite, et qu'on fasse passer un plan par les trois points A, B, C (ax. 3), la droite AB, ayant deux points dans ce plan, y sera située tout entière.

REMARQUE. Deux plans, qui ont une droite commune AB et un point commun C hors de cette droite, se confondent dans toute leur étendue et ne forment qu'un seul et même plan.

Car, si l'on prend deux points quelconques A et B sur la droite, les deux plans auront trois points communs A, B, C, non en ligne droite; donc ils ne formeront qu'un seul plan (th. 1).

THÉORÈME III.

Par deux droites AB, AC, qui ont un point commun, on peut faire passer un plan.

 Par le point A et deux autres points quelconques B et C, pris sur ces droites, faisons passer un plan. Chacune des droites AB, AC, ayant deux points dans ce plan, y sera située tout entière. Donc par deux droites, qui ont un point commun, on peut faire passer un plan.

REMARQUE. Deux plans, qui ont deux droites communes, se confondent dans toute leur étendue, et ne forment qu'un seul et même plan. Car ils ont trois points communs, non en ligne droite.

THÉORÈME IV.

Toute droite AB , qui a ses extrémités d'un même côté d'une ligne droite indéfinie CD , est située tout entière de ce côté.



Car, si un point O de AB était placé de l'autre côté de CD , chacune des deux parties OA , OB , ayant ses extrémités O et A , O et B situées de différents côtés de la droite indéfinie CD , rencontrerait cette ligne en un point (ax. 8), et, par suite, les deux droites AB , CD auraient deux points communs; donc leurs directions se confondraient (ax. 2), et les points A et B appartiendraient tous deux à la droite CD , ce qui est contre la supposition: donc la droite AB est située tout entière d'un même côté de CD .

REMARQUE. On prouverait de même que toute droite, qui a ses extrémités d'un même côté d'un plan, est située tout entière de ce côté.

THÉORÈME V.

Selon qu'un point A , situé dans le plan d'un cercle, est intérieur ou extérieur au cercle, la droite AO , menée de ce point au centre, est plus petite ou plus grande que le rayon.



1° La droite OA prolongée rencontre la circonférence en un point B (ax. 5), et l'on a évidemment $OA < OB$.

2° La droite OA rencontre la circonférence en un point B (ax. 10), et l'on a $OA > OB$.

COROLLAIRE 1. *Selon que la droite, menée du centre d'un cercle à un point situé dans son plan, est égale au rayon du cercle, plus petite ou plus grande que le rayon, ce point est sur la circonférence, dans l'intérieur du cercle ou en dehors.*

COROLLAIRE 2. *Deux circonférences concentriques, situées dans le même plan, et qui ont le même rayon, coïncident dans toute leur étendue et ne forment qu'une seule et même circonférence.*

COROLLAIRE 3. *Tous les cercles de même rayon sont égaux entre eux.*

REMARQUE. Des principes analogues ont lieu pour la sphère, et se démontrent de la même manière.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE I.

LA LIGNE DROITE.

DÉFINITIONS.

1. L'ouverture de deux droites AB , AC , qui se rencontrent, s'appelle *angle plan*. Ces droites sont les *côtés* de l'angle.



REMARQUE. La grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés.

2. Le *sommet* d'un angle est le point de rencontre de ses côtés.

REMARQUE. L'angle se désigne par la lettre A du sommet, ou par les trois lettres BAC , CAB de ses côtés, en mettant celle du sommet au milieu.

3. Deux angles *coïncident*, quand ils ont le même sommet et que leurs côtés coïncident.

4. Deux angles susceptibles de coïncider sont *égaux*.



5. Deux angles BAD , CAD sont *adjacents*, lorsque, ayant le même sommet A et un côté commun AD , ils sont extérieurs l'un à l'autre.

6. Deux angles sont *opposés au sommet*, quand chacun d'eux est formé par les prolongements des côtés de l'autre. Tels sont les angles AOC et BOD , AOD et BOC .



7. Une droite est *perpendiculaire* à



une autre, quand la première fait avec la seconde, et d'un même côté de celle-ci, deux angles égaux entre eux.

Ainsi, en supposant l'angle $\text{COA} = \text{COB}$, la droite CD sera perpendiculaire à la droite AB.

8. Une droite est *oblique* sur une autre, quand la première fait avec la seconde, et d'un même côté de celle-ci, deux angles inégaux.

9. *Élever* une perpendiculaire à une droite, c'est mener une perpendiculaire à cette droite par un point pris sur la droite.

10. *Abaiss*er une perpendiculaire à une droite, c'est mener une perpendiculaire à cette droite par un point pris hors de la droite.

11. On nomme angle *droit* chacun des deux angles adjacents égaux entre eux, que forment deux droites dont l'une est perpendiculaire à l'autre.

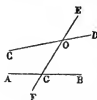
12. Tout angle plus petit qu'un angle droit est un angle *aigu*.

13. Tout angle plus grand qu'un angle droit est un angle *obtus*.

14. Deux angles sont *complémentaires* ou *compléments* l'un de l'autre, quand leur somme est égale à un angle droit.

15. Deux angles sont *supplémentaires* ou *suppléments* l'un de l'autre, quand leur somme est égale à deux angles droits.

16. Lorsque deux lignes droites, situées dans un même plan, sont coupées en deux points par une troisième, on nomme :



1° Angle *intérieur* ou *interne*, chacun des quatre angles formés entre les deux premières droites. Tels sont les angles AGO, BGO, COG, DOG.

2° Angle *extérieur* ou *externe*, chacun des quatre angles formés en dehors de ces mêmes droites. Tels sont les angles AGF, BGF, COE, DOE.

3° Angles *alternes-internes*, deux angles formés de côtés différents de la sécante, intérieurs et non adjacents. Tels sont AGO et DOG, BGO et COG.

4° Angles *internes-externes* ou *correspondants*, deux angles, l'un intérieur et l'autre extérieur, formés d'un même côté de la sécante et non adjacents. Tels sont AGO et COE, BGO et DOE, COG et AGF, DOG et BGF.

5° Angles *alternes-externes*, deux angles formés de côtés différents de la sécante, extérieurs et non adjacents. Tels sont AGF et DOE, BGF et COE.

17. Deux lignes droites sont *parallèles*, lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne se rencontrent pas (princ. déf. 10).

THÉORÈME PREMIER.

Par un point C, situé sur une droite AB, 1° on peut élever une perpendiculaire à cette droite; 2° on n'en peut élever qu'une d'un même côté de la même droite.



1° Par le point C et un point quelconque D, pris hors de la ligne AB, menons la droite CD : si les deux angles adjacents DCA, DCB sont égaux entre eux, la droite CD sera la perpendiculaire demandée (déf. 7) : si ces deux angles sont inégaux, et que DCA soit plus grand que DCB, concevons, dans l'angle DCA, un angle ECA = DCB, et l'angle DCE divisé en deux parties égales par une droite CF; je dis que cette droite sera perpendiculaire sur AB, c'est-à-dire qu'on aura $FCA = FCB$.

En effet, par hypothèse, l'angle $ECA = DCB$, et l'angle $ECF = DCF$; donc $ECA + ECF = DCB + DCF$ ou $FCA = FCB$.

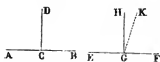


2^e Soit la droite CD perpendiculaire sur AB; je dis que toute autre droite CK, menée par le point C, du même côté de AB que CD, est oblique sur AB (déf. 8).

En effet, l'angle ACK est plus grand que ACD; l'angle BCK est plus petit que BCD; or, par hypothèse, $ACD = BCD$, donc l'angle ACK est plus grand que BCK; donc CK est oblique sur AB.

THÉORÈME II.

Tous les angles droits sont égaux entre eux.



Soit la droite CD perpendiculaire sur AB, et la droite GH perpendiculaire sur EF; je dis que les angles droits ACD, EGH sont égaux.

Plaçons la première figure sur la seconde de manière que le point C tombe au point G et que la droite AB coïncide avec EF; je dis que CD prendra la direction GH; car supposons qu'elle prenne une direction GK différente de GH; puisque, par hypothèse, CD est perpendiculaire sur AB, la droite GK serait perpendiculaire sur EF; donc il y aurait deux perpendiculaires GH, GK, élevées en un même point G sur EF, et d'un même côté de cette droite, ce qui est impossible (1); donc CD prendra la direction GH et l'angle ACD coïncidera avec EGH; donc tous les angles droits sont égaux entre eux.

REMARQUE. On a superposé les deux figures en faisant coïncider le plan de la première avec celui de la seconde. Il en sera de même dans tous les autres cas de superposition des figures planes.

THÉORÈME III.

Toute ligne droite CD, qui en rencontre une autre

AB, fait avec celle-ci deux angles adjacents DCA, DCB dont la somme est égale à deux angles droits.



Élevons, sur AB, la perpendiculaire CE (1). La somme des angles DCA, DCB se compose des trois angles ECA, ECD, DCB : le premier ECA est droit ; les deux autres ECD, DCB, pris ensemble, donnent l'angle droit ECB ; donc la somme des angles DCA, DCB est égale à deux angles droits.

COROLLAIRE 1. *Lorsqu'un des deux angles DCA, DCB est droit, aigu ou obtus, l'autre est un angle droit, obtus ou aigu.*

COROLLAIRE 2. *La somme de tous les angles consécutifs ACD, DCE, ECF, FCB, formés d'un même côté d'une droite AB, est égale à deux angles droits. Car leur somme est égale à celle des deux angles adjacents DCA, DCB.*



COROLLAIRE 3. *La somme de tous les angles consécutifs AOB, BOC, COD, etc., formés autour d'un point O par plusieurs droites qui se rencontrent en ce point, est égale à quatre angles droits. Car si, par le point O, on mène une droite quelconque FG, la somme des angles proposés se composera de la somme des angles consécutifs AOF, AOB, BOG, formés d'un même côté de FG, et de la somme des angles COG, COD, DOE, EOF, formés de l'autre côté de cette droite.*



THÉORÈME IV.

Réciproquement, lorsque deux angles adjacents DCA, DCB sont supplémentaires, les côtés extrêmes AC, BC sont en ligne droite.



Car supposons qu'une droite CK, différente de CB, soit le prolongement de AC; la ligne ACK étant droite, l'angle DCK aura pour supplément DCA (3); mais, par hypothèse, l'angle DCB a aussi pour supplément l'angle DCA; donc les angles DCK, DCB, ayant le même supplément, seraient égaux entre eux, ce qui est absurde.



COROLLAIRE. Les perpendiculaires OC, OD, élevées au point O sur la droite AB (1), sont situées dans la même direction. Car, chacun des angles AOC, AOD étant droit, leur somme est égale à deux droits.

THÉORÈME V.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à une autre, réciproquement, celle-ci est perpendiculaire à la première.



Soit la droite CD perpendiculaire sur AB, de sorte que l'angle $COA = COB$; je dis que la droite AB est perpendiculaire à CD.

En effet, l'angle COA étant droit par hypothèse (déf. 11), AOD est aussi un angle droit (3); donc ces deux angles sont égaux (2), donc AB est perpendiculaire à CD.

REMARQUE. Soient les deux droites AB, CD qui se coupent perpendiculairement au point O : si une droite OM, d'abord appliquée sur OA, tourne autour du point O, dans le sens indiqué par la flèche, l'angle variable AOM croîtra d'une manière continue jusqu'à ce que la droite OM coïncide avec OB : on dit alors que cette droite OM a décrit un angle égal

à deux angles droits; et, sous ce point de vue, on regarde les deux droites OA , OB , qui sont situées dans la même direction, comme faisant entre elles un angle égal à deux droits. Si la droite OM continue de se mouvoir dans le même sens autour du point O , quand elle sera confondue avec OD , l'angle AOM sera égal à trois angles droits. Lorsque OM coïncidera avec OA , l'angle AOM formé par ces deux droites sera égal à quatre angles droits: enfin, si l'on suppose que la droite OM tourne toujours dans le même sens autour du point O , l'angle AOM croîtra indéfiniment. C'est ainsi qu'on peut concevoir un angle dont le rapport à l'angle droit soit un nombre donné aussi grand qu'on voudra; mais toutes les fois qu'il sera question, dans ce traité, de l'angle de deux droites, on entendra parler d'un angle aigu, droit ou obtus, lequel sera toujours moindre que deux droits, à moins qu'on n'exprime le contraire.

THÉORÈME VI.

Les angles AOC , BOD opposés au sommet sont égaux entre eux.



En effet, la ligne AOB étant droite, l'angle AOC a pour supplément BOC (3); la ligne COD étant droite, l'angle BOD a aussi pour supplément BOC ; donc les angles AOC , BOD , ayant le même supplément BOC , sont égaux entre eux.

On prouverait de même l'égalité des deux angles AOD , BOC .

THÉORÈME VII.

Deux angles, qui ont même sommet et les côtés

perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.



Il y a trois cas à considérer :

1^o Soient AOB , COD les angles proposés qui ont le côté OA , perpendiculaire sur OC , situé de l'autre côté de OC par rapport à OD , et le côté OB , perpendiculaire sur OD , situé du même côté de OD que la ligne OC ; je dis qu'ils sont égaux.

En effet, la ligne OA étant perpendiculaire sur OC , l'angle AOC est droit et, par suite, l'angle AOB a pour complément BOC ; pareillement, l'angle BOD étant droit, COD a pour complément BOC ; donc les angles AOB , COD , ayant le même complément BOC , sont égaux entre eux.

Si l'un des angles proposés était obtus, on prouverait qu'ils sont égaux comme ayant le même excès sur un angle droit.

2^o Soient les angles AOB , DOE qui ont le côté OA , perpendiculaire sur OE , situé de l'autre côté de OE par rapport à OD , et le côté OB , perpendiculaire sur OD , situé de l'autre côté de OD par rapport à OE ; je dis qu'ils sont supplémentaires.

En effet, la somme des angles AOB , BOD , DOE , AOE vaut quatre angles droits (3, cor. 3) ; or AOE et BOD sont des angles droits, donc la somme des angles AOB , DOE vaut deux angles droits.

3^o Soient les angles AOB , COF qui ont le côté OA , perpendiculaire sur OC , situé du même côté de OC que OF , et le côté OB , perpendiculaire sur OF , situé du même côté de OF que OC ; je dis qu'ils sont supplémentaires.

Car les angles COF , DOE , opposés au sommet, sont égaux (6) et celui-ci est supplément de AOB (2^o).

REMARQUE. Lorsqu'un des angles proposés est droit, l'autre est aussi un angle droit, et les deux angles sont à la fois égaux et supplémentaires.

THÉORÈME VIII.

Deux droites AB , CD , qui font avec une troisième EF deux angles alternes-internes, correspondants ou alternes-externes égaux entre eux, sont parallèles.



1° Soit l'angle $AGO = DOG$. L'angle BGO supplément de AGO est égal à l'angle COG supplément de DOG : cela étant, si l'on place la figure $BGOD$ sur la figure $AGOC$, de manière que le point O tombe au point G et que le point G tombe au point O , puisque l'angle $DOG = AGO$, la ligne OD prendra la direction GA ; pareillement, puisque l'angle $BGO = COG$, la ligne GB prendra la direction OC : donc, si les deux lignes GA , OC se rencontraient, leurs prolongements GB , OD se rencontreraient aussi de l'autre côté de EF , d'où il résulterait que deux lignes droites AB , CD auraient deux points communs sans coïncider, ce qui est impossible (ax. 2) ; donc ces deux lignes sont parallèles.

2° Soit l'angle $AGO = COE$. On a aussi $DOG = COE$ (6) ; donc $AGO = DOG$; or ces deux angles sont alternes-internes, donc les droites AB , CD sont parallèles.

3° Soit l'angle $COE = BGF$. On a aussi l'angle $AGO = BGF$ (6) ; donc $AGO = COE$; or ces deux angles sont correspondants, donc les droites AB , CD sont parallèles.

REMARQUE. Étant donné le point O , situé hors d'une droite AB , si l'on mène une droite OG qui rencontre AB en un point G , et qu'on fasse l'angle $COG = BGO$, la droite COD sera parallèle à AB ; donc par un point situé hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite.

THÉORÈME IX.

Deux droites AB , CD , qui font avec une troisième EF deux angles intérieurs AGO , COG , d'un même côté, dont la somme est égale à deux angles droits, sont parallèles.



En effet, la ligne CD étant droite, l'angle DOG a pour supplément COG ; mais, par hypothèse, AGO a aussi pour supplément l'angle COG ; donc $AGO = DOG$; or ces deux angles sont alternes-internes, donc AB est parallèle à CD (8).

THÉORÈME X.

Lorsque deux droites AB , AC , qui se rencontrent, sont coupées en deux points O et G par une troisième EF : 1° deux angles quelconques, alternes-internes, correspondants ou alternes-externes, sont inégaux; 2° tout angle extérieur AOF , formé du même côté de la sécante que le point de rencontre, est plus grand que l'angle intérieur correspondant AGO ; 3° la somme des deux angles intérieurs AGO , AOG , du même côté de la sécante que le point de rencontre, est moindre que deux angles droits.

1° Car, si deux angles alternes-internes, correspondants ou alternes-externes étaient égaux entre eux, les deux droites AB , AC seraient parallèles (8), ce qui est contre la supposition.



2° Car, l'angle AOF n'étant pas égal à l'angle AGO , si l'on n'avait pas $\text{AOF} > \text{AGO}$, il faudrait qu'on eût $\text{AGO} > \text{AOF}$. Cela étant, si l'on fait, dans l'angle AGO , un angle $\text{OGD} = \text{AOF}$, la droite GD rencontrera AC en un point D (ax. 4); donc l'angle extérieur DOF serait égal à l'angle intérieur correspondant DGO , ce qui est impossible (1°); donc $\text{AOF} > \text{AGO}$.

3° En effet, la ligne EOF étant droite, la somme des angles adjacents AOF , AOG est égale à deux droits; remplaçant AOF par un plus petit angle AGO , il vient $\text{AGO} + \text{AOG} < \text{deux droits}$.

COROLLAIRE 1. *Lorsqu'un des deux angles intérieurs AGO , AOG est droit ou obtus, l'autre est un angle aigu.*

COROLLAIRE 2. La somme des quatre angles intérieurs AGO , AOG , BGO , COG étant égale à quatre angles droits (3), et celle des deux premiers étant moindre que deux droits, il s'ensuit que la somme des deux angles intérieurs BGO , COG , formés de l'autre côté de la sécante, est plus grande que deux angles droits.

THÉORÈME XI.

D'un point C , situé hors d'une droite AB , 1° on peut abaisser une perpendiculaire à cette droite; 2° on n'en peut abaisser qu'une.



1° Prenons un point D sur AB , et menons CD : si l'angle $\text{ADC} = \text{BDC}$, la droite CD sera la perpendiculaire demandée; si ces deux angles sont inégaux, et qu'on ait, par exemple, $\text{ADC} > \text{BDC}$, faisons l'angle $\text{BDE} = \text{BDC}$, prenons $\text{DE} = \text{DC}$ et menons CE , qui sera perpendiculaire sur AB . Car, si l'on place la figure COD sur la figure EOD , de manière que la ligne

OD soit commune aux deux figures, la droite DC prendra la direction DE et le point C tombera en E; donc OC coïncidera avec OE (ax. 2) et, par suite, l'angle COD avec EOD; donc ces deux angles sont égaux et la droite AB est perpendiculaire sur CE; donc, réciproquement, CE est perpendiculaire sur AB (5).

2° La ligne CO étant perpendiculaire sur AB, toute autre droite CD, menée du point C à la ligne AB, est oblique sur AB. Car, l'angle COD étant droit, CDO est un angle aigu. (10, cor. 1.)

THÉORÈME XII.

Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

Car si elles se rencontraient, il y aurait deux droites abaissées de leur point de rencontre perpendiculairement sur une troisième, ce qui est impossible (11).

DEMANDE.

Lorsque deux lignes droites se rencontrent, toute droite parallèle à l'une d'elles rencontre l'autre; ou, autrement, par un point situé hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.

THÉORÈME XIII.

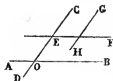
Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Car si elles se rencontraient, il y aurait deux droites menées de leur point de rencontre parallèlement à une troisième, ce qui est impossible (dem.).

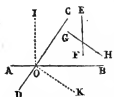
THÉORÈME XIV.

Lorsque deux droites AB, CD se rencontrent, leurs

parallèles ou leurs perpendiculaires respectives EF, GH se rencontrent aussi.



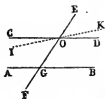
1° En effet, puisque AB et CD se rencontrent, EF parallèle à AB rencontre CD (dem.); de même, puisque CD et EF se rencontrent, GH parallèle à CD rencontre EF.



2° Menons OI perpendiculaire sur AB et OK perpendiculaire à CD (1): les deux droites EF, OI perpendiculaires à une même droite AB sont parallèles (12): par la même raison, GH est parallèle à OK; donc, en vertu de ce qui précède, les deux droites EF, GH se rencontrent.

THÉORÈME XV.

Lorsque deux droites parallèles AB, CD sont coupées par une troisième droite EF: 1° deux angles quelconques, alternes-internes, correspondants ou alternes-externes, sont égaux entre eux; 2° la somme de deux angles intérieurs AGO, COG, d'un même côté de la sécante, est égale à deux angles droits.



1° Je dis qu'on aura, par exemple, $\text{AGO} = \text{DOG}$: car supposons que cette égalité n'ait pas lieu, et soit menée par le point O la droite IK telle que l'angle $\text{KOG} = \text{AGO}$; les droites AB, IK, faisant avec une troisième EF des angles alternes-internes KOG , AGO égaux entre eux, seraient parallèles (8); donc il y aurait

deux droites CD , IK menées d'un même point O parallèlement à une même droite AB , ce qui est impossible (dem); donc l'angle $AGO = DOG$.

On prouverait de même l'égalité de deux angles correspondants ou alternes-externes.

2^o En effet, la ligne AGB étant droite, on a $AGO + BGO =$ deux droits (3); remplaçant l'angle BGO par COG (1^o), on aura $AGO + COG =$ deux droits.

COROLLAIRE. *Lorsqu'un des deux angles intérieurs AGO , COG est droit, aigu ou obtus, l'autre est un angle droit, obtus ou aigu.*

REMARQUE. En général les trois droites AB , CD , EF forment quatre angles aigus égaux entre eux, et quatre angles obtus aussi égaux entre eux; de plus, deux quelconques de ces angles, l'un aigu et l'autre obtus, sont supplémentaires.

THÉORÈME XVI.

Lorsque deux droites sont coupées par une troisième de manière que deux angles alternes-internes, correspondants ou alternes-externes soient inégaux, ou que la somme de deux angles intérieurs d'un même côté ne soit pas égale à deux angles droits, ces deux droites se rencontrent.

Car si elles étaient parallèles, deux angles quelconques alternes-internes, correspondants ou alternes-externes seraient égaux entre eux, et la somme de deux angles intérieurs d'un même côté serait égale à deux angles droits (15), ce qui est contre la supposition.

REMARQUE. Dans le cas où la somme de deux angles intérieurs d'un même côté n'est pas égale à deux angles droits, les droites se rencontrent du côté de la sécante où cette somme d'angles est moindre que deux droits; car, si elles se rencontraient de l'autre côté de la sécante, la

somme des angles intérieurs de ce côté serait moindre que deux droits (10), ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME XVII.

Lorsque deux droites AB, CD sont parallèles, toute droite, perpendiculaire à l'une d'elles, est perpendiculaire à l'autre.



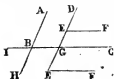
Je dis que la droite EF, perpendiculaire sur AB, est aussi perpendiculaire à CD.

En effet, les deux lignes AB, EF se rencontrant au point G, la droite CD parallèle à AB rencontre EF en un point O (dem.); de plus, les angles DOG, AGO sont égaux comme alternes-internes; or AGO est droit par hypothèse, donc DOG est aussi un angle droit; donc EF est perpendiculaire à CD.

THÉORÈME XVIII.

Deux angles, qui ont les côtés parallèles chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.

Trois cas pourront se présenter, selon que les angles proposés auront leurs côtés parallèles dirigés respectivement dans le même sens, deux côtés parallèles dirigés dans le même sens et les deux autres en sens contraire, ou leurs côtés parallèles dirigés respectivement en sens contraire.



1° Soient ABC, DEF les angles proposés; je dis qu'ils sont égaux entre eux.

La droite DE, prolongée si cela est nécessaire, rencontre BC en un point G (dem.): cela posé, puisque la

droite AB est parallèle à DE , les angles correspondants ABC , DGC sont égaux entre eux (15); de même, puisque BC est parallèle à EF , l'angle $DEF = DGC$, donc $ABC = DEF$.

2° Soient les angles HBC , DEF ; je dis qu'ils sont supplémentaires.

Car soit BA le prolongement de HB ; la somme des angles adjacents HBC , ABC est égale à deux angles droits; remplaçant ABC par DEF (1°), on a $HBC + DEF =$ deux droits.

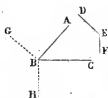
3° Soient les angles IBH , DEF ; je dis qu'ils sont égaux entre eux.

En effet, soit BA le prolongement de HB et BC celui de IB ; l'angle $IBH = ABC$ (6); mais celui-ci est égal à DEF (1°); donc l'angle $IBH = DEF$.

REMARQUE. Lorsqu'un des angles proposés est droit, l'autre est aussi un angle droit, et les deux angles sont à la fois égaux et supplémentaires.

THÉORÈME XIX.

Deux angles, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.



Ce théorème a déjà été démontré dans le cas de deux angles qui ont le même sommet (7). Cela étant, soient ABC , DEF les angles proposés, qui ont le côté AB perpendiculaire à DE et le côté BC perpendiculaire à EF .

Menons BG parallèle à ED et BH parallèle à EF ; on aura l'angle $GBH = DEF$ (18); or, la droite AB , perpendiculaire à DE , est aussi perpendiculaire à BG (17); pareillement, la droite BC , perpendiculaire à EF , est aussi perpendiculaire à BH ; donc les angles

ABC , GBH sont égaux ou supplémentaires (7) ; donc il en est de même des angles ABC , DEF .

REMARQUE. Lorsque d'un point E , situé dans un angle ABC , on abaisse des perpendiculaires ED , EF sur les côtés AB , AC , l'angle DEF formé par ces perpendiculaires est supplément du premier (7, 2°).



LIVRE II.

LA LIGNE BRISÉE ET LES POLYGONES.

DÉFINITIONS.

1. Un *polygône* est une surface plane terminée par une ligne brisée. Telle est la surface ABCDE.



REMARQUE. Quelquefois la ligne brisée se désigne aussi sous le nom de *polygône*.

2. Chacune des droites qui composent le contour d'un polygône est un *côté* du polygône.

3. Chacun des angles formés par deux côtés consécutifs d'un polygône est un *angle* du polygône.

4. Les *sommets* d'un polygône sont les sommets des angles du polygône.

5. Toute droite qui joint, dans un polygône, deux sommets non consécutifs, s'appelle *diagonale*. Telle est la ligne AC.

6. Le polygône de trois côtés s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés, *quadrilatère*; celui de cinq, *pentagône*; celui de six, *hexagône*, et ainsi de suite.

7. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit.

8. L'*hypoténuse* d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit.

9. Le triangle *obtusangle* est celui qui a un angle obtus.

10. Le triangle *isoscele* est celui qui a deux côtés égaux.

11. La *base* d'un triangle est indifféremment un côté quelconque.

REMARQUE. Dans le triangle isoscele on prend particulièrement pour base le côté qu'on ne suppose pas égal aux deux autres.

12. Le *sommet* d'un triangle est le *sommet* de l'angle opposé au côté pris pour base.

13. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire abaissée du *sommet* sur la base.

14. La *distance* de deux points est la plus courte des lignes qu'on peut mener de l'un des points à l'autre.

REMARQUE. La distance de deux points est la droite qui joint ces deux points (ax. 12).

15. La *distance* d'un point à une figure est la plus courte des lignes qu'on peut mener du point à la figure.

16. La *distance* de deux figures est la plus courte des lignes qu'on peut mener de l'une des figures à l'autre.

17. Le *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Ainsi, lorsque deux droites parallèles sont coupées par deux autres droites parallèles, le quadrilatère qui en résulte est un *parallélogramme*.

18. La *base* d'un *parallélogramme* est indifféremment un côté quelconque.

19. La *hauteur* d'un *parallélogramme* est la distance de la base au côté opposé.

20. Le *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement sont parallèles.

21. Les *bases* d'un *trapèze* sont les deux côtés parallèles.

22. La *hauteur* d'un *trapèze* est la distance des deux bases.

23. Le *rectangle* est un quadrilatère qui a ses angles droits.

Ainsi, lorsque deux droites parallèles sont coupées perpendiculairement par deux autres droites parallèles (livre 1, 17), le quadrilatère qui en résulte est un *rectangle*.

REMARQUE. Tout *rectangle* est un *parallélogramme* (liv. 1, 12).

24. La *hauteur* d'un *rectangle* est indifféremment l'un quelconque des deux côtés adjacents à la base.

25. Le *losange* est un quadrilatère qui a ses côtés égaux.

Ainsi, lorsque deux triangles isocèles (déf. 10), égaux

entre eux, sont placés extérieurement l'un à l'autre de manière que leurs bases coïncident, la figure totale est un losange.

26. Le *carré* est un quadrilatère qui a ses angles droits et ses côtés égaux.

27. Un polygône est *équianglé*, lorsque tous ses angles sont égaux entre eux.

28. Un polygône est *équilatéral*, lorsque tous ses côtés sont égaux entre eux.



Ainsi lorsque, des extrémités B et C d'une droite, comme centres, avec un rayon égal à BC, on décrit deux circonférences, qui se rencontrent en un point A (ax. 10), et qu'on mène les rayons AB, AC, le triangle ABC qui en résulte est équilatéral.

29. Tout polygône, situé entièrement d'un même côté de la direction de chacun de ses côtés, est *convexe*. Ainsi les triangles, les parallélogrammes et les trapèzes sont des polygones convexes.

REMARQUE. Tous les polygones dont il sera question dans ce traité seront convexes.



30. Tout angle, formé par l'un de deux côtés consécutifs d'un polygône et le prolongement de l'autre, est *extérieur* au polygône. Tel est l'angle DCF, formé par le côté CD et le prolongement CF du côté BC.

31. Les deux angles d'un triangle, non adjacents à un angle extérieur au triangle, s'appellent angles *intérieurs opposés*. Tels sont les deux angles A et B du triangle ABC, par rapport à l'angle ACD extérieur au triangle.



32. La *bissectrice* d'un angle est la droite qui le divise en deux parties égales.

33. Une ligne est le lieu *géométrique* des points qui ont une certaine propriété, lorsque tout point pris sur la ligne

a cette propriété, et que tout point pris hors de la ligne n'a pas cette même propriété.

Ainsi, la circonférence est le lieu géométrique des points dont la distance au centre est égale au rayon (princ. 5).

34. Lorsque deux polygones, qui ont un angle égal, sont tels, qu'en suivant chaque contour dans un même sens, le second angle de l'un des polygones soit égal au second angle de l'autre, le troisième au troisième, et ainsi de suite, ces deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre.

35. Dans deux polygones, qui ont les angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, on nomme : 1° *angles homologues*, les angles égaux qui ont le même rang ; 2° *côtés homologues*, les côtés adjacents aux angles homologues ; 3° *sommets homologues*, les sommets des angles homologues ; 4° *diagonales homologues*, celles qui joignent des sommets homologues ; 5° *triangles homologues*, ceux qui ont leurs sommets homologues.

THÉORÈME PREMIER.

Une ligne droite, menée comme on voudra, ne peut rencontrer le contour d'un polygone convexe en plus de deux points.

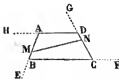


Car, supposons qu'une ligne droite puisse rencontrer le contour du polygone convexe ABCD en trois points M, N, P ; le côté AD, rencontrant la droite MNP au point N placé entre M et P, la couperait en ce point (ax. 6) ; donc les deux autres points M et P du polygone seraient situés de différents côtés de la direction AD, ce qui est contraire à la définition des polygones convexes (déf. 29) ; donc une ligne droite, menée comme on voudra, ne peut rencontrer le contour d'un polygone convexe en plus de deux points.

REMARQUE. Lorsqu'une droite a la même direction qu'un côté du polygone, les points de ce côté, placés entre ses extrémités, ne sont pas regardés comme points de rencontre de la droite avec le contour du polygone.

THÉOREME II.

Toute droite MN, qui a ses extrémités sur le contour d'un polygone convexe ABCD, est située tout entière dans le polygone.



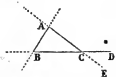
En effet, si l'on prolonge chacun des côtés AB, BC, CD, etc., en suivant le contour dans un même sens, le polygone, étant convexe, sera situé tout entier d'un même côté de la ligne AE; la droite MN, ayant ses extrémités sur le contour du polygone, sera de même située tout entière de ce côté de AE; donc elle n'a aucun point dans la portion de plan indéfinie EAH, qui est placée, par rapport au polygone, de l'autre côté de AE; on prouverait de même que la droite MN n'a aucun point dans les portions de plan EBF, FCG, etc.; donc elle est tout entière dans le polygone ABCD.

REMARQUE. Soit ABC un triangle quelconque. La droite MN qui a ses extrémités M et N, l'une entre A et B sur le côté AB, l'autre entre A et C sur le côté AC, détermine un quadrilatère convexe BMNC. Pareillement, la droite PQ, dont les extrémités P et Q sont situées respectivement sur les côtés consécutifs BC, CN du quadrilatère, détermine un pentagone convexe MNPQB, et ainsi de suite : donc on peut construire des polygones convexes d'un nombre de côtés aussi grand qu'on voudra.



THÉORÈME III.

Tout angle ACD , extérieur à un triangle, est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés, et la somme de deux angles intérieurs ABC , ACB , pris comme on voudra, est moindre que deux angles droits.



1° Car ACD et ABC sont deux angles correspondants par rapport aux deux droites AB , AC coupées par la ligne BC (liv. 1, déf. 16); donc l'angle extérieur ACD est plus grand que ABC (liv. 1, 10); on aura pareillement $BCE > BAC$; or $ACD = BCE$, donc $ACD > BAC$.

2° Car ABC et ACB sont des angles intérieurs formés du même côté de la sécante BC que le point de rencontre A des deux droites AB , AC ; donc leur somme est moindre que deux angles droits (liv. 1, 10).

COROLLAIRE. Lorsqu'un des trois angles d'un triangle est droit ou obtus, chacun des deux autres est un angle aigu.

THÉORÈME IV.

Lorsque d'un point O , pris dans l'intérieur d'un triangle ABC , on mène des droites aux extrémités de la base, l'angle BOC formé par ces droites est plus grand que l'angle au sommet.



Prolongeons BO jusqu'à la rencontre du côté AC en D (ax. 4). L'angle BOC , extérieur au triangle COD , est plus grand que l'angle intérieur ODC (3); pareillement,

l'angle ODC, extérieur au triangle BAD, est plus grand que BAC; donc, à plus forte raison, $\text{BOC} > \text{BAC}$.

THÉORÈME V.

Tout angle ACD, extérieur à un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, et la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.



Menons CE parallèle à AB. Les angles ACE et A sont égaux, comme alternes-internes; les angles DCE et B sont égaux, comme correspondants (livre 1, 15); donc l'angle total ACD est égal à la somme des deux angles A et B: de plus, les trois angles B, A, C du triangle étant égaux respectivement aux trois angles consécutifs ECD, ACE, ACB, forment une somme égale à deux angles droits (liv. 1, 3).

COROLLAIRE 1. *Lorsque deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, le troisième angle de l'un est égal au troisième de l'autre.*

COROLLAIRE 2. *Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.*

THÉORÈME VI.

La somme des angles d'un polygône ABCDE est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux.



D'un même sommet A menons les diagonales AC, AD aux autres sommets; ces droites seront intérieures au polygône (2), et le partageront en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; car, si l'on prend le point A pour sommet

commun de tous ces triangles, chaque côté du polygone servira de base à un triangle, à l'exception des deux côtés A B, A E qui se rencontrent au point A ; mais la somme des angles du polygone est visiblement égale à celle des angles de tous les triangles ; d'ailleurs la somme des angles de chaque triangle est égale à deux droits (5) ; donc la somme des angles du polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles ou de côtés moins deux dans le polygone.

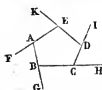
COROLLAIRE 1. *La somme des angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.*

REMARQUE. Si l'on désigne par n le nombre des côtés d'un polygone, la somme de ses angles sera $2 \times (n - 2)$ ou $2n - 4$ angles droits.

COROLLAIRE 2. Lorsqu'on prolonge chacun des côtés d'un

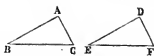
polygone ABCDE en suivant le contour dans un même sens, la somme des angles CBG, DCH, EDI, etc., extérieurs au polygone, est égale à quatre angles droits. En effet, $ABC + CBG =$ deux droits, $BCD + DCH =$ deux

droits, et ainsi de suite ; donc la somme de tous les angles intérieurs et extérieurs au polygone est égale à n fois deux angles droits ou à $2n$ angles droits ; or la somme des angles intérieurs est égale à $2n - 4$ angles droits, donc la somme des angles extérieurs vaut quatre angles droits.



THÉORÈME VII.

Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, le troisième côté de l'un est égal au troisième côté de l'autre, les deux triangles sont égaux, et les autres angles opposés à des côtés égaux sont égaux entre eux ;



Soit l'angle $A = D$, le côté $AB = DE$ et le côté $AC = DF$.

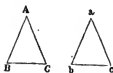
Plaçons le triangle ABC sur DEF de manière que le point A tombe au point D et que le côté AB coïncide avec DE : le point B tombera au point E ; et, puisque l'angle A est égal à l'angle D , le côté AC tombera sur le côté DF qui lui est égal, et le point C au point F ; donc le troisième côté BC coïncidera avec le troisième côté EF (ax. 2), le triangle ABC avec DEF , l'angle B avec l'angle E et l'angle C avec l'angle F : donc le côté $BC = EF$, le triangle $ABC = DEF$, l'angle $B = E$ et l'angle $C = F$.

REMARQUE. On prouverait de même qu'en général *deux polygones de n côtés sont égaux, lorsqu'ils ont $n - 2$ angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les $n - 1$ côtés homologues égaux* (déf. 34 et 35).

Il en résulte que $(n - 2) + (n - 1)$ ou $2n - 3$ conditions sont nécessaires pour l'égalité de deux polygones de n côtés, et que ces conditions suffisent lorsqu'elles sont convenablement choisies.

THÉORÈME VIII.

Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux.



Soit le côté $AB = AC$; je dis que l'angle $C = B$.

Concevons un second triangle abc égal au premier : ces deux triangles ont l'angle $A = a$, le côté $AB = ac$ et le côté $AC = ab$; donc, en vertu du théorème précédent, l'angle C opposé au côté AB est égal à l'angle b opposé au côté ac ; or $B = b$ par hypothèse, donc $C = B$.

COROLLAIRE 1. *Tout triangle équilatéral est équilatéral, et*

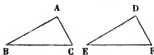
chaque angle d'un triangle équilatéral est le tiers de deux angles droits (5) ou les deux tiers d'un angle droit.

COROLLAIRE 2. Chacun des angles aigus d'un triangle rectangle isocèle vaut un demi-angle droit (5 cor. 2).

COROLLAIRE 3. Lorsque deux triangles rectangles isocèles, égaux entre eux, sont placés extérieurement l'un à l'autre de manière que leurs bases coïncident, la figure totale est un carré (déf. 26).

THÉORÈME IX.

Lorsque deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre, les deux triangles sont égaux, et les autres côtés opposés à des angles égaux sont égaux entre eux.



Soit le côté $BC = EF$, l'angle $B = E$, et l'angle $C = F$.

Plaçons le triangle ABC sur DEF de manière que le point B tombe au point E et que le côté BC coïncide avec EF qui lui est égal : le point C tombera au point F ; et, puisque l'angle B est égal à l'angle E , le côté BA prendra la direction du côté ED ; pareillement, puisque l'angle $C = F$, le côté CA prendra la direction FD ; donc le point A tombera au point D , le troisième angle A coïncidera avec le troisième angle D , le triangle ABC avec DEF , le côté AB avec DE et le côté AC avec DF : donc l'angle $A = D$, les deux triangles sont égaux, le côté $AB = DE$, et le côté $AC = DF$.

REMARQUE. On prouverait de même qu'en général deux polygones de n côtés sont égaux, lorsqu'ils ont $n - 1$ angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les $n - 2$ côtés homologues égaux. On retrouve ainsi le nombre $(n - 1) + (n - 2)$ ou $2n - 3$ de conditions nécessaires pour l'égalité de deux polygones de n côtés (7, rem.).

THÉORÈME X.

Lorsque deux angles sont égaux dans un triangle, les côtés opposés à ces angles sont égaux entre eux.



Soit l'angle $B = C$; je dis que le côté $AC = AB$.

Concevons un second triangle abc égal au premier : ces deux triangles ont le côté $BC = bc$, l'angle $B = c$ et l'angle $C = b$; donc, en vertu du théorème précédent, le côté AC opposé à l'angle B est égal au côté ab opposé à l'angle c ; or $AB = ab$ par hypothèse, donc $AC = AB$.

COROLLAIRE. *Tout triangle équiangle est équilatéral.*

THÉORÈME XI.

Lorsque deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux, ainsi que les deux triangles proposés.



Soient ABC , DBC les triangles proposés que nous supposons placés de manière

qu'ils aient un côté commun BC , le côté $AB = DB$, et le côté $AC = DC$. Il suffira de prouver que l'angle $BAC = BDC$, car alors les deux triangles auront un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (7).

Or, si l'on mène AD , cette droite rencontrera la ligne BC en un point O , et trois cas pourront se présenter selon que

le point O sera situé sur le côté BC, à l'une de ses extrémités, ou sur un de ses prolongements.

1° Le côté AB étant, par hypothèse, égal au côté DB, l'angle $BDA = BAD$ (8); de même, puisque le côté AC = DC, l'angle $CDA = CAD$; donc $BDA + CDA = BAD + CAD$ ou $BDC = BAC$.

2° Puisque le côté AB = DB, l'angle $BDA = BAD$.

3° Puisque le côté AC = DC, l'angle $CDA = CAD$; de même, puisque le côté AC = DC, l'angle $CDA = CAD$; donc $BDA - CDA = BAD - CAD$ ou $BDC = BAC$.

THÉORÈME XII.

La droite AD, menée du sommet au milieu de la base d'un triangle isocèle, est perpendiculaire à cette base et divise l'angle du sommet en deux parties égales.



En effet, les triangles ABD, ACD ont le côté AD commun, le côté AB = AC et le côté BD = CD par hypothèse; donc les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux (11); donc l'angle ADB = ADC et l'angle BAD = CAD.

COROLLAIRE 1. *La hauteur d'un triangle isocèle divise la base et l'angle du sommet en deux parties égales (liv. I, 11).*

COROLLAIRE 2. *La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isocèle est perpendiculaire sur le milieu de la base.*

COROLLAIRE 3. *La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base d'un triangle isocèle divise l'angle du sommet en deux parties égales (liv. I, 1).*

THÉORÈME XIII.

Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse

égale et un angle aigu égal, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre, les deux triangles sont égaux, et les autres angles opposés à des côtés égaux sont égaux entre eux.



Soit l'hypoténuse $AC = DF$ et l'angle aigu $C = F$.

Plaçons le triangle ABC sur DEF de manière que le point A tombe au point D et l'hypoténuse AC sur DF ; le point C tombera au point F , et, puisque l'angle $C = F$, le côté CB prendra la direction FE ; donc le point B tombera au point E , sans quoi il y aurait deux perpendiculaires abaissées du point D sur une même droite EF , ce qui est impossible; donc l'angle $A = D$, le triangle $ABC = DEF$, le côté $AB = DE$ et le côté $BC = EF$.

THÉORÈME XIV.

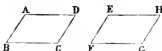
Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal, le troisième côté de l'un est égal au troisième côté de l'autre, les deux triangles sont égaux, et les autres angles opposés à des côtés égaux sont égaux entre eux.



Soient ABC , ABD les triangles proposés, qui ont l'hypoténuse $AC = AD$ et le côté AB commun. La somme des angles ABC , ABD étant égale à deux droits, la ligne CD est droite (liv. I. 4); or, dans le triangle ACD ; le côté $AC = AD$ par hypothèse, donc l'angle $D = C$ (8); donc les triangles ABC , ABD , ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal; donc le côté $BC = BD$, les deux triangles sont égaux, et l'angle $BAC = BAD$ (13).

THÉORÈME XV.

Deux parallélogrammes, qui ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, sont égaux entre eux.



Soit l'angle $A = E$, le côté $AB = EF$ et le côté $AD = EH$.

Plaçons la figure $ABCD$ sur $EFGH$ de manière que le point A tombe au point E et le côté AB sur EF ; le point B tombera au point F , et, puisque l'angle $A = E$, le côté AD prendra la direction EH et le point D tombera au point H ; donc la droite DC parallèle à AB prendra la direction de HG parallèle à EF , sans quoi il y aurait deux parallèles menées d'un même point H à une même droite EF , ce qui est impossible; pareillement, la droite BC parallèle à AD prendra la direction de FG parallèle à EH ; donc le point C tombera au point G et les figures coïncideront; donc elles sont égales.

COROLLAIRE 1. Deux rectangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux entre eux.

COROLLAIRE 2. Tous les carrés qui ont un côté égal sont égaux entre eux.

THÉORÈME XVI.

Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux entre eux; et réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère, les angles opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.



1° Les angles A et C , ayant les côtés parallèles chacun à chacun et dirigés en sens contraire, sont égaux entre eux. Il en est de même des angles B et D .

2° Soit $A = C$ et $B = D$. On aura $A + B = C + D$; or la somme des angles du quadrilatère est égale à quatre angles droits (6); donc leur demi-somme $A + B$ est égale à deux droits; donc les droites AD , BC sont parallèles (liv. 1, 9); on prouvera de même que AB est parallèle à CD ; donc $ABCD$ est un parallélogramme.

THÉORÈME XVII.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux; et réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.



1° Menons la diagonale AC . Les triangles ABC , ADC ont le côté AC commun, les angles BAC , ACD égaux, comme alternes-internes, et l'angle $ACB = CAD$ par la même raison; donc le côté AB opposé à l'angle ACB est égal au côté CD opposé à l'angle CAD , et le côté BC opposé à l'angle BAC est égal au côté AD opposé à l'angle ACD (9).

2° Soit le côté $AB = CD$ et $AD = BC$. Les triangles ABC , ADC ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle BAC opposé au côté BC est égal à l'angle ACD opposé au côté AD (11); or ces deux angles sont alternes-internes, donc les droites AB , CD sont parallèles (liv. 1, 8); on prouverait de même que AD est parallèle à BC ; donc $ABCD$ est un parallélogramme.

COROLLAIRE. *Tous les losanges sont des parallélogrammes* (déf. 25).

REMARQUE. Les triangles ABC , ADC , ayant un côté commun AC adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont égaux entre eux (9); donc *chaque diagonale d'un parallélogramme partage la figure en deux triangles égaux.*

THÉORÈME XVIII.

Lorsque deux côtés opposés AB , CD d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, les deux autres côtés AD , BC sont aussi égaux et parallèles.



Menons la diagonale AC . Les triangles ABC , ACD ont les angles BAC , ACD égaux, comme alternes-internes, le côté AC commun, et le côté $AB = CD$ par hypothèse; donc $BC = AD$ et l'angle $ACB = CAD$ (7); or ces deux angles sont alternes-internes, donc AD est parallèle à BC .

THÉORÈME XIX.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales; et réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, les côtés opposés sont égaux et parallèles.



1° Les triangles AOB , COD ont les côtés AB , CD égaux, comme opposés dans un parallélogramme (17), les angles OAB , OCD égaux, comme alternes-internes, et l'angle $OBA = ODC$ par la même raison; donc $OA = OC$ et $OB = OD$ (9).

2° Les triangles AOB , COD ont les angles AOB , COD égaux, comme opposés au sommet, le côté $AO = CO$ et le côté $BO = DO$ par hypothèse; donc $AB = CD$ et l'angle $BAO = DCO$ (7); or ces deux angles sont alternes-internes, donc AB est parallèle à CD . On prouverait de même que AD est égal et parallèle à BC .

THÉORÈME XX.

Les diagonales d'un rectangle ABCD se coupent en quatre parties égales ; et réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère, les diagonales se coupent en quatre parties égales, la figure est un rectangle.



1° La figure ABCD étant un parallélogramme (déf. 23), on a $OA = OC$, $OB = OD$ (19) et $AB = CD$ (17) ; de plus, l'angle droit $ABC = BCD$ et le côté BC est commun aux triangles ABC , BCD ; donc ces triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, et, par suite, $AC = BD$ (7) ; donc OA moitié de AC est égal à OB moitié de BD , et l'on a $OA = OB = OC = OD$.

2° On a, par hypothèse, $OA = OB = OC = OD$, d'où il résulte $AC = BD$; de plus, puisque les diagonales AC , BD se coupent mutuellement en parties égales, la figure ABCD est un parallélogramme (19) et, par suite, $AB = CD$; donc les triangles ABC , BCD ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; donc l'angle $ABC = BCD$ (11) ; or ces deux angles sont supplémentaires (liv. 1, 15), donc ils sont droits et la figure ABCD est un rectangle (16).

COROLLAIRE 1. Dans tout triangle rectangle ABC , le milieu de l'hypoténuse est également distant des trois sommets.

COROLLAIRE 2. Réciproquement, lorsqu'un point O , situé sur l'un des trois côtés d'un triangle ABC , est également distant des trois sommets, l'angle opposé à ce côté est droit.

THÉORÈME XXI.

Les diagonales d'un losange ABCD se coupent mutuellement en deux parties égales et à angles droits ; et

réciiproquement, lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en parties égales et à angles droits, la figure est un losange.



1° La figure ABCD étant un parallélogramme (17), on a $OA = OC$, $OB = OD$ (19); de plus, la droite AO, qui joint le sommet du triangle isoscèle ABD au milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base (12); donc les diagonales AC, BD se coupent à angles droits.

2° Les triangles AOB, BOC, COD, AOD ont un angle droit égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc les troisièmes côtés AB, BC, CD, AD sont égaux entre eux, et la figure ABCD est un losange.

COROLLAIRE. *Les diagonales d'un carré se coupent en quatre parties égales et à angles droits; et réciproquement, lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en quatre parties égales et à angles droits, la figure est un carré.* Cela résulte de ce qu'un carré est à la fois un rectangle (20) et un losange.

THÉORÈME XXII.

Lorsqu'un côté AB d'un triangle ABC est partagé en parties égales, les droites DG, EH, FI menées par les points de division, parallèlement à la base BC, partagent l'autre côté AC en parties égales.



Achevons les parallélogrammes DGHK, EHIL, FICM. Les triangles ADG, DEK ont le côté $AD = DE$ par hypothèse; de plus, les angles DAG et EDK, ADG et DEK sont égaux comme correspondants; donc $AG = DK$; on prouverait de même

que $DK = EL = FM$: or les droites GH et DK , HI et EL , IC et FM sont égales comme côtés opposés d'un parallélogramme ; donc $AG = GH = HI = IC$.

REMARQUE 1. *Lorsqu'un côté DB d'un trapèze $DBCG$ est partagé en parties égales, les droites menées par les points E, F de division, parallèlement aux bases, partagent l'autre côté GC en parties égales.*

REMARQUE 2. La droite menée par le point D milieu de AE parallèlement à EH passe par le milieu de AH ; de plus, les droites DG, KH sont égales comme côtés opposés d'un parallélogramme, et, les triangles ADG, DEK ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, le côté $DG = EK$; donc $EK = KH = DG$; donc la droite DG , qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle AEH , est parallèle à la base EH et égale à la moitié de cette base.

On voit de même que la droite EH , qui joint les milieux des deux côtés d'un trapèze $DFIG$, est parallèle aux bases.

THÉORÈME XXIII.

Dans tout trapèze : 1° la droite EF , qui joint les milieux des deux côtés AB, DC , est égale à la demi-somme des bases ; 2° la droite IK , qui joint les milieux des diagonales AC, BD , est égale à la demi-différence des bases.



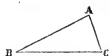
La droite EF , étant menée par le milieu de AB parallèlement à la base BC du triangle ABC (22, rem. 2), passe par le point I milieu de AC (22) ; cette même droite EF , étant parallèle à la base AD du triangle ABD , passe par le point K milieu de BD . Cela étant, les triangles ABC, ACD, ABD donnent $EI = \frac{1}{2} BC$, $IF = \frac{1}{2} AD$, $EK = \frac{1}{2} AD$ (22, rem. 2) ; donc 1° $EI + IF = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AD$

ou $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$; 2° $EI - EK = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AD$ ou $IK = \frac{1}{2}(BC - AD)$.

REMARQUE. Les milieux E, F des deux côtés d'un trapèze et les milieux I, K des diagonales sont situés en ligne droite.

THÉORÈME XXIV.

Dans tout triangle, un côté AB est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.



1° Car la droite AB est plus courte que la ligne brisée ACB qui a les mêmes extrémités (ax. 12).

2° On a $BC < AB + AC$ (1°); retranchant AC de part et d'autre, il vient $BC - AC < AB$ ou $AB > BC - AC$.

THÉORÈME XXV.

De deux côtés d'un triangle celui-là est le plus petit qui est opposé à un plus petit angle; et réciproquement, de deux angles d'un triangle, celui-là est le plus petit qui est opposé à un plus petit côté.



1° Soit l'angle $ACB < ABC$; je dis que le côté AB est plus petit que AC . Dans l'angle ABC menons une droite qui fasse avec BC l'angle $CBD = ACB$: cette droite rencontrera AC en un point D (ax. 4), et l'on aura $BD = CD$ (10); mais le triangle ABD donne $AB < AD + BD$ (2°); remplaçant BD par CD , il vient $AB < AD + CD$ ou $AB < AC$.

2° Car, si l'angle opposé au plus petit côté était égal ou supérieur à l'angle opposé au plus grand côté, le plus petit côté serait égal (10) ou supérieur (1°) au plus grand, ce qui est absurde.

THÉORÈME XXVI.

Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle formé par les deux côtés du premier plus petit que l'angle formé par les deux côtés du second, le troisième côté du premier triangle est plus petit que le troisième côté du second.



Soient ABC , ABD les triangles proposés, qui ont le côté AB commun, le côté $AC = AD$ et l'angle $BAC < BAD$; je dis que le troisième côté BC est plus petit que le troisième côté BD .

Concevons la différence CAD des angles BAD , BAC divisée en deux parties égales; la bissectrice rencontrera BD en un point E (ax. 4) et, si l'on mène la droite CE , les triangles CAE , DAE auront l'angle $EAC = EAD$, le côté AE commun et $AC = AD$ par hypothèse; donc le troisième côté $CE = DE$; mais le triangle BCE donne $BC < BE + CE$ (24); remplaçant CE par DE , il vient $BC < BE + DE$ ou $BC < BD$.

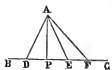
REMARQUE. Si les trois points B , C , D étaient en ligne droite, on aurait évidemment $BC < BD$.

COROLLAIRE. Réciproquement, lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et le troisième côté du premier plus petit que le troisième côté du second, l'angle opposé au troisième côté du premier triangle est plus petit que l'angle opposé au troisième côté du second.

Car, si l'angle opposé au troisième côté du premier triangle était égal ou supérieur à l'angle opposé au troisième côté du second, le troisième côté du premier serait égal (7) ou supérieur (26) au troisième côté du second, ce qui est contraire à la supposition.

THÉORÈME XXVII.

Lorsque d'un point A , situé hors d'une droite BC , on mène une perpendiculaire à cette droite et différentes obliques : 1° la perpendiculaire AP est plus courte que toute oblique AD ; 2° deux obliques AD , AE , dont les pieds s'écartent également de la perpendiculaire, sont égales, 3° de deux obliques AD , AF , dont les pieds s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle dont le pied s'en écarte le moins est la plus courte.



1° L'angle APD étant droit, ADP est aigu (3) ; donc $ADP < APD$ et, par suite, $AP < AD$ (25).

2° Les triangles ADP , AEP ont le côté AP commun, l'angle $APD = APE$ et $PD = PE$ par hypothèse ; donc $AD = AE$ (7).

3° Soit $DP < FP$; je dis que l'oblique AD est plus courte que l'oblique AF .

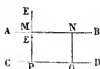
Prenons $EP = DP$ et menons AE . Les obliques AE , AD sont égales (2°) ; donc il suffit de prouver que l'oblique AE est plus courte que AF . Or, l'angle APF étant droit, chacun des angles AEP , AFP est aigu ; l'angle AEP étant aigu, AEF est obtus ; donc, dans le triangle AEF , on a l'angle $AFE < AEF$; donc $AE < AF$.

COROLLAIRE 1. Lorsque deux obliques sont égales, leurs pieds s'écartent également de la perpendiculaire ; et, lorsque deux obliques sont inégales, le pied de la plus courte s'écarte le moins de la perpendiculaire.

COROLLAIRE 2. La distance d'un point à une droite est la perpendiculaire abaissée du point sur la droite (déf. 15).

THÉORÈME XXVIII.

Deux parallèles AB , CD sont partout également distantes ; et réciproquement , toute droite AB qui a deux points M et N situés d'un même côté d'une autre droite CD , à égale distance de celle-ci, lui est parallèle.



1° Prenons , sur AB , deux points quelconques M et N et abaissons sur CD les perpendiculaires MP , NQ , qui seront aussi perpendiculaires sur AB (liv. I, 17) ; je dis que $MP = NQ$.

En effet , ces deux droites , étant perpendiculaires à une troisième , sont parallèles ; donc $MPQN$ est un parallélogramme ; donc $MP = NQ$ (17).

2° Car , si l'on abaisse les perpendiculaires MP , NQ sur CD , on aura par hypothèse $MP = NQ$; d'ailleurs ces deux lignes , perpendiculaires à une même droite CD , sont parallèles ; donc dans le quadrilatère $MPQN$, les côtés opposés MN , PQ sont parallèles (18) ou , autrement , AB est parallèle à CD .

COROLLAIRE. La ligne AB est le lieu géométrique des points situés, d'un même côté de CD , à une distance de cette droite égale à celle des deux parallèles.

Car si l'on prend , de ce côté de CD , un point quelconque E hors de la ligne AB , et qu'on mène la droite EMP perpendiculaire aux deux parallèles , selon que le point E sera situé entre les parallèles ou en dehors , on aura évidemment $EP < MP$ ou $EP > MP$.

THÉORÈME XXIX.

La perpendiculaire CD sur le milieu d'une droite

AB est le lieu géométrique des points également distants des extrémités de cette droite :



Il s'agit de prouver que tout point M , situé sur CD , est également distant des extrémités A et B , et qu'un point quelconque N , pris hors de CD , est inégalement distant des mêmes extrémités.

1° La distance $AO = BO$, par hypothèse ; donc l'oblique $MA = MB$ (27).

2° Menons NA , NB . La droite NA rencontrera CD en un point M (ax. 8) et, si l'on mène MB , on aura, en vertu de ce qui précède, $MB = MA$; mais le triangle MBN donne $NB < MN + MB$ (24) ; remplaçant MB par MA , il vient $NB < MN + MA$ ou $NB < NA$.

COROLLAIRE. *Toute droite, qui a deux points situés chacun à égale distance des extrémités d'une autre droite, est perpendiculaire sur le milieu de celle-ci.*

THÉORÈME XXX.

Étant donnés trois points A , B , C non en ligne droite, on peut trouver un autre point également distant des trois premiers, mais on n'en peut trouver qu'un seul.



Menons AB , AC ; élevons, sur le milieu de AB , la perpendiculaire DE et, sur le milieu de AC , la perpendiculaire FG ; ces deux lignes se rencontreront en un point O (liv. I, 14), qui sera le point demandé.

En effet, le point O , appartenant à la perpendiculaire DE , est également distant des points A et B (29) ; le même point O , appartenant à la perpendiculaire FG , est également

distant des deux points A et C ; donc les trois distances OA, OB, OC sont égales entre elles.

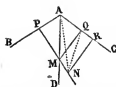
2° Je dis que O est le seul point également distant des trois points A, B, C.

Car tout point également distant de A, B, C appartient à la fois aux deux perpendiculaires DE, FG (29), qui se rencontrent au seul point O.

COROLLAIRE. Si l'on mène BC, la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite passera par le point O, qui est également distant des extrémités B et C (29) ; donc *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle ABC concourent en un même point.*

THÉORÈME XXXI.

La bissectrice AD d'un angle BAC est le lieu géométrique des points situés dans l'angle à égale distance de ses côtés.



1° D'un point quelconque M, pris sur AD, menons MP perpendiculaire sur AB, et MQ perpendiculaire sur AC ; je dis que $MP = MQ$.

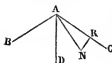
En effet, les triangles rectangles AMP, AMQ ont l'hypoténuse AM commune et l'angle aigu $MAP = MAQ$, par hypothèse ; donc le côté $MP = MQ$ (13).

2° Soit N un point pris dans l'angle BAC hors de la bissectrice. Menons, de ce point, NP perpendiculaire sur AB et NR perpendiculaire sur AC ; je dis qu'on aura $NR < NP$.

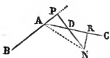
Trois cas peuvent se présenter selon que l'angle BAN est aigu, droit ou obtus.

Premier cas. La droite NP rencontrera AD en un point M (ax. 8), et, si l'on mène MQ perpendiculaire sur AC, on aura $MP = MQ$ (1°) ; mais la perpendiculaire NR est plus

courte que l'oblique NQ (27); de plus, le triangle MNQ donne $NQ < MN + MQ$; remplaçant MQ par MP , il vient $NQ < MN + MP$ ou $NQ < NP$; donc, à plus forte raison, $NR < NP$.



Second cas. L'angle BAN étant droit, la perpendiculaire NP se confond avec AN , et la droite NR , perpendiculaire sur AC , est plus courte que l'oblique NA .



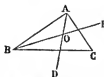
Troisième cas. L'angle BAN étant obtus, la perpendiculaire NP tombe sur le prolongement de BA (3, cor.), et rencontre le côté AC en un point D ; or la droite NR , perpendiculaire sur

AC , est plus courte que l'oblique ND ; d'ailleurs on a évidemment $ND < NP$; donc, à plus forte raison, $NR < NP$.

COROLLAIRE. Toute droite qui a deux points dans un angle, situés chacun à égale distance de ses côtés, divise cet angle en deux parties égales.

THÉORÈME XXXII.

Un triangle ABC étant donné, on peut trouver dans l'intérieur un point également distant des trois côtés, mais on n'en peut trouver qu'un seul.



1° Soit AD la bissectrice de l'angle BAC , et BE celle de l'angle ABC ; ces droites se rencontrent en un point O situé dans l'intérieur du triangle (ax. 4); le point O , appartenant à la bissectrice AD , est également distant des côtés AB , AC (31); le même point O , appartenant à la bissectrice BE , est également distant des côtés AB , BC ; donc il est également distant des trois côtés.

2° Je dis que O est le seul point intérieur également distant des trois côtés.

Car tout point intérieur également distant des trois côtés appartient à la fois aux deux bissectrices AD, BE (31), qui se rencontrent en un seul point O.

COROLLAIRE. La bissectrice de l'angle C passera par le point O, qui est également distant des côtés AC, BC; donc *les bissectrices des angles d'un triangle ABC concourent en un même point.*

LIVRE III.

LA CIRCONFÉRENCE ET LE CERCLE.

DÉFINITIONS.

1. Le *cercle* peut être considéré comme engendré par la révolution d'une droite OA qui tourne autour du point fixe O . Dans ce mouvement, le point A décrit la circonférence (princ. déf. 19).



2. L'*arc* est une partie de la circonférence.

3. La *corde* ou *sous-tendante* d'un arc est la droite qui joint les extrémités de l'arc.

4. Toute corde qui passe par le centre est un *diamètre*.

REMARQUE. Tous les diamètres d'un même cercle sont doubles du rayon, et, par suite, égaux entre eux.

5. La partie du cercle, comprise entre un arc et sa corde, se nomme *segment circulaire*. Cette corde est la *base* du segment.

6. La partie du cercle, comprise entre un arc et les rayons menés à ses extrémités, s'appelle *secteur circulaire*. Cet arc est la *base* du secteur ; le centre du cercle en est le *sommet*.

7. Tout angle, dont le sommet est au centre du cercle, s'appelle *angle au centre*.

8. Un angle au centre et un arc sont *correspondants*, l'un à l'autre, lorsque l'angle a pour côtés les rayons menés aux extrémités de l'arc.

9. Une droite est *inscrite* dans un cercle, lorsqu'elle a ses extrémités sur la circonférence.

10. L'angle, formé par deux cordes qui se rencontrent sur la circonférence, s'appelle *angle inscrit*.

11. Un angle est *inscrit* dans un segment, lorsqu'il a pour côtés les droites menées d'un point de l'arc du segment à ses extrémités.

12. Un segment est *capable* d'un certain angle, lorsque tout angle inscrit dans le segment est égal à l'angle proposé.

13. Un polygone *inscrit* est celui dont tous les côtés sont inscrits dans le cercle.

14. Un cercle est *circonscrit* à un polygone, lorsque le polygone est inscrit dans le cercle.

15. Une ligne droite et une circonférence sont *tangentes*, lorsqu'elles ont un seul point commun (princ. déf. 10).

16. Deux circonférences sont *tangentes*, lorsqu'elles ont un seul point commun.

17. Le point, commun à une tangente et à la circonférence ou à deux circonférences tangentes, s'appelle point de *contact*.

18. Un polygone est *circonscrit* à un cercle, lorsque chaque côté est tangent à la circonférence en un point situé entre ses extrémités.

19. Un cercle est *inscrit* dans un polygone, lorsque le polygone est circonscrit au cercle.

20. Une ligne droite est *normale* ou *oblique* à un cercle en un point de la circonférence, selon qu'elle est perpendiculaire ou oblique à la tangente menée par ce point.

21. Lorsque deux cercles non concentriques sont dans un même plan, la droite indéfinie menée par les centres des deux cercles se nomme *ligne des centres*.

THÉORÈME PREMIER.

Une ligne droite ED, menée comme on voudra, ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points A et B.



Prenons, sur AB , un point C , entre A et B ; puis, joignons le centre aux points A, B, C . Le triangle AOB étant isocèle, la droite OI , menée du sommet au milieu de la base AB , est perpendiculaire à cette base (liv. II, 12); donc $OC < OA$ (liv. II, 27); donc le point C est intérieur au cercle. On prouverait de même que tout point D , situé sur un des prolongements de AB , est extérieur au cercle; donc A et B sont les seuls points où la droite ED rencontre la circonférence.

COROLLAIRE 1. *Toute corde AB est intérieure au cercle.*

COROLLAIRE 2. *La circonférence est une ligne courbe. (princ. déf. 12).*

THÉORÈME II.

Le centre d'un cercle est le seul point duquel on puisse mener à la circonférence plus de deux droites égales entre elles.



Car si d'un point P , autre que le centre du cercle, on pouvait mener, à la circonférence O , trois droites PA, PB, PC égales entre elles, il y aurait deux points O et P situés chacun à égale distance des trois points A, B, C , ce qui est impossible (liv. II, 30).

COROLLAIRE 1. *Un cercle n'a qu'un seul centre.*

COROLLAIRE 2. *Deux circonférences, qui ont trois points communs A, B, C , coïncident dans toute leur étendue et ne forment qu'une seule et même circonférence.*

REMARQUE. Soit O le point également distant des trois points A, B, C non en ligne droite (liv. II, 30); si l'on décrit une circonférence du point O comme centre, avec un

rayon égal à la droite AO , elle passera par les points A, B, C : donc étant donnés trois points non en ligne droite, on peut décrire une circonférence qui passe par ces trois points.

THÉORÈME III.

La perpendiculaire BC , menée à l'extrémité d'un rayon OA , est tangente à la circonférence; et réciproquement, le rayon OA , mené au point de contact, est perpendiculaire à la tangente.



1° Prenons, sur BC , un point quelconque D , autre que A , et menons OD . L'oblique OD est plus grande que la perpendiculaire OA ; donc le point D est situé hors du cercle; donc la droite BC n'a que le point A commun avec la circonférence; donc elle est tangente (déf. 15).

2° Puisque BC est une tangente, tous ses points, excepté A , sont situés hors du cercle; donc, si l'on mène du point O à la ligne BC une droite quelconque OD , autre que OA , on aura $OA < OD$; donc OA est perpendiculaire sur BC (liv. II, 27, cor. 2).

COROLLAIRE 1. Par un point, situé sur une circonférence, on ne peut mener qu'une seule tangente. Car si l'on pouvait en mener deux, elles seraient perpendiculaires à l'extrémité du rayon mené au point de contact, ce qui est impossible (liv. I, 1).

COROLLAIRE 2. Toute droite, menée par le centre du cercle, est normale à la circonférence (déf. 20); et réciproquement, toute normale à la circonférence passe par le centre du cercle (liv. I, 1).

COROLLAIRE 3. La perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente passe par le point de contact (liv. I, 11).

THÉORÈME IV.

Les tangentes, menées aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles; et réciproquement, lorsque deux tangentes sont parallèles, la corde qui joint les points de contact est un diamètre.

1° Car elles sont toutes deux perpendiculaires à ce diamètre (3, 2°).

2° Car le diamètre, perpendiculaire à l'une des tangentes, est aussi perpendiculaire à l'autre (liv. 1, 17); donc il passe par les deux points de contact (3, cor. 3).

COROLLAIRE. *Les tangentes menées aux extrémités d'une corde, autre qu'un diamètre, se rencontrent; et réciproquement, lorsque deux tangentes se rencontrent, la corde qui joint les points de contact n'est pas un diamètre.*

THÉORÈME V.

Tout diamètre AB divise le cercle et la circonférence en deux parties égales.



Car, si l'on place le segment ACB sur le segment ADB, de manière que le diamètre AB soit commun aux deux figures, tous les points de l'arc ACB, étant situés à une distance du centre égale au rayon, tomberont sur l'arc ADB.

COROLLAIRE. *Toute corde AC, autre qu'un diamètre, divise le cercle et la circonférence en deux parties inégales.* Car on a le segment ADC plus grand que le demi-cercle ADB et l'arc ADC plus grand que la demi-circonférence ADB.

REMARQUE. Lorsque'il sera question de l'arc sous-tendu par une corde autre qu'un diamètre, ce sera toujours du plus

petit des deux arcs, sous-tendus par cette corde, qu'on entendra parler, à moins qu'on n'exprime le contraire.

THÉOREME VI.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, à des angles au centre AOB, DCE, égaux entre eux, correspondent des arcs égaux; et réciproquement.



1° Plaçons le cercle OA sur le cercle CD de manière que le point O tombe au point C, que le rayon OA coïncide avec CD et que l'angle AOB tombe sur l'angle DCE; les deux circonférences coïncideront (princ. 5); et le point A tombera au point D; de plus, puisque l'angle $AOB = DCE$, le rayon OB prendra la direction CE et le point B tombera au point E; donc l'arc AB coïncidera avec DE; donc ces arcs sont égaux.

2° Soit l'arc $AB = DE$. Si l'on fait coïncider, comme précédemment, le cercle OA avec le cercle CD, le point A tombera au point D; et, puisque l'arc $AB = DE$, le point B tombera au point E; donc le rayon OB coïncidera avec le rayon CE, et l'angle AOB avec DCE; donc ces deux angles sont égaux.

REMARQUE. On voit de même que, dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux secteurs qui ont des bases égales sont égaux entre eux.

COROLLAIRE. L'arc correspondant à un angle droit au centre est égal au quart de la circonférence, et le secteur qui a pour base le quart de la circonférence est égal au quart du cercle. Car, soient AB, CD, deux diamètres perpendiculaires



entre eux; les quatre angles droits AOC, BOC, BOD, AOD sont égaux; donc les arcs correspondants AC, BC, BD, AD sont égaux entre eux, ainsi que les quatre secteurs auxquels ces arcs servent de bases.

THÉORÈME VII.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, à un plus grand angle au centre correspond un plus grand arc; et réciproquement.



1° Soit l'angle $AOB > DCE$. Si l'on conçoit, dans l'angle AOB , un angle $AOF = DCE$, on aura l'arc $AF = DE$ (6, 1°); mais l'arc AB est évidemment plus grand que AF ; donc $AB > DE$.

2° Soit l'arc $AB > DE$. Si l'on prend, sur l'arc AB , une partie $AF = DE$, et qu'on mène OF , on aura l'angle $AOF = DCE$ (6, 2°); mais l'angle AOB est évidemment plus grand que AOF , donc $AOB > DCE$.

REMARQUE. On prouverait de la même manière que, dans un même cercle ou dans des cercles égaux, de deux secteurs celui-là est le plus grand qui a la plus grande base.

THÉORÈME VIII.

Le diamètre CD , perpendiculaire à une corde AB , divise cette corde et chacun des arcs sous-tendus en deux parties égales.



En effet, dans le triangle isocèle AOB , la hauteur OP divise la base AB et l'angle au sommet AOB en deux parties égales (liv. II, 12), donc $AP = BP$ et l'angle $AOC = BOC$; donc l'arc $AC = BC$ (6, 1°); de plus, l'angle AOD , supplément de AOC , est égal à l'angle BOD , supplément de BOC ; donc l'arc $AD = BD$.

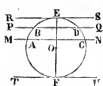
COROLLAIRE 1. La perpendiculaire élevée sur le milieu

d'une corde passe par le centre et divise chacun des arcs sous-tendus par cette corde en deux parties égales.

COROLLAIRE 2. *Le diamètre mené au milieu d'un arc est perpendiculaire sur le milieu de sa corde, et divise l'autre arc sous-tendu par cette corde en deux parties égales.*

THÉORÈME IX.

Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.



Trois cas pourront se présenter, selon que les deux parallèles seront toutes deux sécantes, l'une sécante et l'autre tangente, ou toutes deux tangentes.

1° Soient les deux parallèles MN, PQ. Le diamètre EF, perpendiculaire à la corde AC, est aussi perpendiculaire à la corde BD (liv. I, 17); donc il divise chacun des arcs AEC, BED en deux parties égales (8); donc l'arc AE = CE, l'arc BE = DE, et, par suite, AE — BE = CE — DE ou AB = CD.

2° Soient les deux parallèles MN, RS, dont l'une est sécante, et l'autre tangente au point E. Le diamètre EF mené au point de contact, étant perpendiculaire à la tangente RS (3), est aussi perpendiculaire à la sécante MN; donc il divise l'arc AEC en deux parties égales; donc l'arc AE = CE.

3° Soient les parallèles RS, TU, qui sont tangentes, l'une au point E et l'autre au point F. La corde EF, qui joint les points de contact, est un diamètre (4); donc elle divise la circonférence en deux parties égales (5); donc l'arc EAF = ECF.

THÉORÈME X.

Le diamètre est la plus grande ligne droite qu'on puisse inscrire dans le cercle.



Soit la corde AB qui ne passe pas par le centre du cercle. Menons le diamètre AC et le rayon OB : le triangle AOB donne $AO + OB > AB$, or $AO + OB = AC$; donc $AC > AB$.

THÉORÈME XI.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux arcs égaux AB , DE sont sous-tendus par des cordes égales; et réciproquement.



1° En effet, puisque l'arc $AB = DE$, l'angle $AOB = DCE$ (6); donc les triangles AOB , DCE ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc le troisième côté AB est égal au troisième côté DE .

2° Soit la corde $AB = DE$; je dis que l'arc $AB = DE$.

Car, les triangles AOB , DCE ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle AOB opposé à la corde AB est égal à l'angle DCE opposé à la corde DE ; donc l'arc $AB = DE$ (6).

THÉORÈME XII.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc est sous-tendu par une plus grande corde; et réciproquement.



Soit l'arc $AB > DE$; je dis que la corde AB est plus grande que la corde DE .

En effet, puisque l'arc AB est plus grand que l'arc DE , l'angle AOB est plus grand que l'angle

DCE (7) : d'ailleurs les triangles AOB, DCE ont le côté $OA = CD$ et le côté $OB = CE$; donc le troisième côté AB est plus grand que le troisième côté DE (liv. II, 26).

2° Soit la corde $AB > DE$; je dis que l'arc AB est plus grand que l'arc DE.

Car les triangles AOB, DCE ont, par hypothèse, le côté $OA = CD$, le côté $OB = CE$ et le troisième côté AB plus grand que le troisième côté DE ; donc l'angle O est plus grand que l'angle C (liv. II, 26) : donc l'arc AB est plus grand que l'arc DE (7).

REMARQUE. Si les arcs dont il s'agit étaient plus grands qu'une demi-circonférence, la proposition directe et sa réciproque auraient lieu en sens inverse de leur énoncé : ainsi, la corde AB étant plus grande que la corde DE, l'arc AMB est plus petit que l'arc DNE.

THÉORÈME XIII.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes égales sont également éloignées du centre ; et réciproquement.



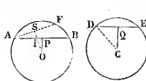
1° Soient les cordes égales AB, DE ; je dis que la perpendiculaire OP, abaissée du centre O sur AB, est égale à la perpendiculaire CQ, abaissée du centre C sur DE.

Menons les rayons OA, CD. Les triangles rectangles AOP, DCQ ont l'hypoténuse $OA = CD$ et le côté AP, moitié de AB (8), égal au côté DQ, moitié de DE ; donc $OP = CQ$ (liv. II, 14).

2° Soit $OP = CQ$. Les triangles AOP, DCQ ont l'hypoténuse égale et un autre côté égal ; donc $AP = DQ$ et, par suite, la corde AB, double de AP, est égale à la corde DE, double de DQ.

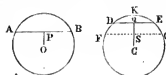
THÉORÈME XIV.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, de deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée du centre; et réciproquement.



1° Soit la corde $AB > DE$; je dis que la perpendiculaire OP , abaissée du centre O sur AB , est plus courte que la perpendiculaire CQ , abaissée du centre C sur DE .

En effet, puisque la corde AB est plus grande que DE , l'arc AB est plus grand que l'arc DE (12) : cela étant, prenons sur l'arc AB un arc $AF = DE$ et menons AF . La corde AF est égale à la corde DE (11) et, par suite, la perpendiculaire OS , abaissée du centre O sur AF , est égale à CQ (13) : mais la droite OS rencontre la corde AB en un point I (ax. 8), et l'on a $OP < OI$ (liv. II, 27); donc, à plus forte raison, $OP < OS$ ou $OP < CQ$.



2° Soit $OP < CQ$; je dis que la corde AB est plus grande que la corde DE .

Prenons $CS = OP$ et menons, par le point S , la corde FG perpendiculaire à CQ ; on aura $FG = AB$ (13) et l'arc $FKG > DKE$; donc la corde FG est plus grande que la corde DE (12); or $FG = AB$, donc $AB > DE$.

THÉORÈME XV.

Tout angle inscrit est la moitié de l'angle au centre correspondant à l'arc compris entre ses côtés.



Trois cas peuvent se présenter, selon que le centre du cercle est situé sur un des côtés de l'angle, dans l'angle ou hors de l'angle.

1° L'angle inscrit BAC est la moitié de l'angle au centre BOC correspondant à l'arc BC . En effet, l'angle BOC , extérieur au triangle AOC , est égal à la somme des angles intérieurs A et C (liv. II, 5); mais, dans le triangle isocèle AOC , l'angle $A = C$; donc $BAC = \frac{1}{2} BOC$.

2° L'angle inscrit $CAD = \frac{1}{2} COD$. Car, si l'on mène le diamètre AB , on aura $BAC = \frac{1}{2} BOC$ (1°) et $BAD = \frac{1}{2} BOD$; donc $BAC + BAD = \frac{1}{2} BOC + \frac{1}{2} BOD$, ou $CAD = \frac{1}{2} COD$.

3° L'angle inscrit $CAE = \frac{1}{2} COE$. Car $BAE = \frac{1}{2} BOE$ et $BAC = \frac{1}{2} BOC$; donc $BAE - BAC = \frac{1}{2} BOE - \frac{1}{2} BOC$, ou $CAE = \frac{1}{2} COE$.

COROLLAIRE 1. *Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux entre eux.* Car chacun d'eux est la moitié d'un même angle au centre.

COROLLAIRE 2. *Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.* Car il est la moitié de l'angle au centre correspondant à la demi-circonférence, lequel est égal à deux droits (liv. I, 5 rem.).

COROLLAIRE 3. *Tout angle inscrit dans un segment plus grand que le demi-cercle est un angle aigu.* Car il est la moitié de l'angle au centre correspondant à un arc plus petit que la demi-circonférence, lequel angle est moindre que deux droits.

On voit de même que *tout angle inscrit dans un segment plus petit que le demi-cercle est un angle obtus.*

THÉORÈME XVI.

Tout angle, formé par une tangente et une corde, est la moitié de l'angle au centre correspondant à l'arc compris entre ses côtés.



Trois cas peuvent se présenter, selon que le centre du cercle est situé sur la corde, dans l'angle ou hors de l'angle.

1^o L'angle BAC, formé par la tangente CD et le diamètre AB, est la moitié des deux angles droits qui composent l'angle au centre AOB correspondant à l'arc AMB (3, 2^o).

2^o L'angle CAE est la moitié de l'angle au centre AOE correspondant à l'arc AME compris entre ses côtés. En effet, l'angle BAC = $\frac{1}{2}$ AOB (1^o) et l'angle inscrit BAE = $\frac{1}{2}$ BOE (15); donc BAC + BAE = $\frac{1}{2}$ AOB + $\frac{1}{2}$ BOE ou CAE = $\frac{1}{2}$ AOE.

3^o L'angle DAE est la moitié de l'angle AOE correspondant à l'arc ANE. Car l'angle droit BAD = $\frac{1}{2}$ AOB, et l'angle inscrit BAE = $\frac{1}{2}$ BOE; donc BAD - BAE = $\frac{1}{2}$ AOB - $\frac{1}{2}$ BOE, ou DAE = $\frac{1}{2}$ AOE.

THÉORÈME XVII.

L'arc d'un segment AMB est le lieu géométrique des sommets de tous les triangles qui ont pour base commune celle du segment, et, pour angle au sommet, celui dont le segment est capable.



Tous les angles inscrits dans le segment AMB étant égaux entre eux (15, cor. 1), il suffit de prouver que, si d'un point quelconque C, pris hors de l'arc AMB, on mène les droites CA, CB, l'angle ACB sera plus grand ou plus petit que celui dont le segment est capable.

Prenons, sur la corde AB, un point quelconque D, entre A et B, et menons CD. La droite CD, prolongée si cela est nécessaire, rencontrera l'arc AMB en un point E (ax. 4 et 40);

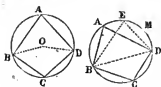
et, si l'on mène AE , BE , selon que le point C sera situé dans l'intérieur du segment ou en dehors, ACB sera plus grand ou plus petit que l'angle AEB (liv. II, 4) inscrit dans le segment.

REMARQUE. On ne considère ici que les points du plan situés du même côté de la corde que l'arc du segment.

COROLLAIRE. *La circonférence décrite sur une droite comme diamètre est le lieu géométrique des sommets des angles droits de tous les triangles rectangles dont cette droite est l'hypoténuse commune* (15, cor. 2).

THÉORÈME XVIII.

Dans tout quadrilatère inscrit $ABCD$, la somme de deux angles opposés A et C est égale à deux droits; et réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère $ABCD$, la somme de deux angles opposés A et C est égale à deux droits, la figure est inscriptible.



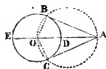
1° En effet, l'angle inscrit BAD est la moitié de l'angle au centre BOD , correspondant à l'arc BCD (15); l'angle inscrit BCD est la moitié de l'angle au centre BOD , correspondant à l'arc BAD ; or ces deux angles au centre, pris ensemble, valent quatre angles droits (liv. I, 3, cor. 3); donc leur demi-somme $A + C$ est égale à deux droits.

2° Faisons passer une circonférence par les trois points B , C , D (2, rem.); prenons un point quelconque E , sur l'arc BMD situé du même côté que le point A par rapport à la diagonale BD , et menons EB , ED . Dans le quadrilatère inscrit $BCDE$, l'angle BED a pour supplément l'angle C ; mais, par hypothèse, l'angle BAD a aussi pour supplément l'angle C ; donc BAD est égal à l'angle BED inscrit dans le

segment BMD ; donc le point A est situé sur l'arc BMD (17), et le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle.

THÉORÈME XIX.

D'un point A, situé hors d'un cercle OB : 1° on peut mener deux tangentes à la circonférence ; 2° on n'en peut mener que deux.



1° Décrivons, sur AO comme diamètre, une circonférence qui rencontrera la circonférence OB en deux points B et C (ax. 10) ; puis, menons les droites AB, AC, qui seront les tangentes demandées.

En effet, chacun des angles ABO, ACO, inscrits dans un demi-cercle, est un angle droit (15, cor. 2) ; donc les droites AB, AC, perpendiculaires aux extrémités des rayons OB, OC, sont tangentes à la circonférence (3).

2° Le cercle OB étant situé entièrement dans l'angle BAC, toute droite, menée par le point A hors de cet angle, ne rencontre pas la circonférence ; de plus, toute droite, menée par le point A dans l'angle BAC, rencontre la circonférence en deux points (ax. 4) ; donc les droites AB, AC sont les seules tangentes qui passent par le point A.

REMARQUE. Les triangles AOB, AOC ont l'hypoténuse AO commune et le côté $OB = OC$; donc le troisième côté $AB = AC$, l'angle $OAB = OAC$ et l'angle $AOB = AOC$; donc l'arc $BD = CD$ (6) et, par suite, l'arc $BE = CE$ (5) ; donc les tangentes AB, AC, menées d'un point pris hors du cercle, sont égales entre elles ; et la droite, menée par ce point et le centre, partage l'angle des tangentes et chacun des arcs qu'elles comprennent en deux parties égales.

THÉORÈME XX.

D'un point A, situé hors d'un cercle : 1° on peut mener deux normales qui se terminent à la circonférence ; 2° on n'en peut mener que deux.



1° La droite AO, menée par le point A et le centre du cercle, rencontre la circonférence en deux points B et C (ax. 10 et 4) et les droites AB, AC sont des normales (3, cor. 2).

2° Toute droite AD, menée par le point A dans une autre direction que AO, ne contient pas le centre du cercle, et, par suite, est oblique à la circonférence (3, cor. 2) ; donc AB, AC sont les seules normales qu'on puisse mener du point A.

REMARQUE. On voit de même que d'un point situé entre le centre et la circonférence, on peut mener deux normales au cercle, mais on n'en peut mener que deux.

THÉORÈME XXI.

Lorsque d'un point A, extérieur à un cercle OB, on mène une normale et différentes obliques extérieures au cercle : 1° la normale AB est plus courte que toute oblique AC ; 2° deux obliques AC, AD, dont les pieds s'écartent également de la normale, sont égales entre elles ; 3° de deux obliques AD, AE, celle dont le pied s'écarte le moins de la normale est la plus courte.



1° Dans le triangle AOC, on a $AO - OC < AC$; or $AO - OC = AO - OB = AB$; donc $AB < AC$.

2° L'arc BC étant, par hypothèse, égal à BD, l'angle $BOC = BOD$ (6) ; de plus,

les triangles AOC , AOD ont le côté AO commun, et le côté $OC = OD$; donc le troisième côté $AC \doteq AD$.

3° L'arc BD étant plus petit que BE , on a l'angle $BOD < BOE$ (7); de plus, les triangles AOD , AOE ont le côté AO commun et le côté $OD = OE$; donc $AD < AE$ (liv. II, 26).

REMARQUE. En prolongeant la normale AB et les obliques AC , AD , AE jusqu'à la rencontre de la circonférence aux points B' , C' , D' , E' , on prouvera de même que 1° la normale AB' , qui contient le centre du cercle, est plus grande que toute oblique AC' ; 2° deux obliques AC' , AD' , dont les pieds s'écartent également de la normale, sont égales entre elles; 3° de deux obliques AD' , AE' , celle dont le pied s'écarte le moins de la normale est la plus grande.

Enfin, des théorèmes analogues, et qui se démontrent de la même manière, ont lieu pour un point A situé entre le centre et la circonférence.

THÉORÈME XXII.

Deux circonférences O et C , qui ont un point commun A sur la ligne des centres, sont tangentes, extérieurement ou intérieurement, selon que ce point est situé entre les deux centres ou sur un des prolongements de la droite qui les joint.



1° Joignons le centre O à un point quelconque B de la circonférence CA . L'oblique OB est plus grande que la normale OA (21); donc le point B est extérieur au cercle OA . On prouverait de même qu'à l'exception du point A , un point quelconque D de la circonférence OA est extérieur au cercle CA ; donc les deux cercles se touchent extérieurement.



2^e Joignons le centre O à un point quelconque B de la circonférence CA . L'oblique OB est plus courte que la normale OA qui contient le centre C (21, rem.); donc le point B est intérieur au cercle OA ; donc les deux cercles sont tangents intérieurement.

THÉORÈME XXIII.

Deux circonférences O et C , qui ont un point commun A hors de la ligne des centres, se rencontrent en un second point situé de l'autre côté de cette ligne par rapport au premier.

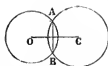


Abaissons la perpendiculaire AP sur OC ; prenons, sur le prolongement de AP , une quantité $PB = AP$, et menons OA , OB , CA , CB . La droite OC étant perpendiculaire au milieu de AB , on a $OB = OA$, $CB = CA$ (liv. II, 29); donc les deux circonférences passent par le point B .

COROLLAIRE. *Lorsque deux cercles se touchent, intérieurement ou extérieurement, la ligne des centres passe par le point de contact.* Car, si le point de contact était situé hors de la ligne des centres, les deux circonférences auraient un second point commun, ce qui est contre la supposition.

THÉORÈME XXIV.

Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint les points d'intersection.



Soient O et C les centres des circonférences, qui se coupent aux points A et B .

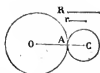
Les deux points O et C de la droite OC sont situés chacun à égale distance des extrémités A et B de la corde AB ; donc OC est perpendiculaire sur le milieu de AB (liv. II, 29).

REMARQUE. Lorsque les deux cercles sont égaux, les points A et B sont situés chacun à égale distance des extrémités O et C de la droite OC ; donc, *lorsque deux circonférences égales se coupent, la corde qui joint les points d'intersection est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les centres.*

COROLLAIRE. *Lorsque deux circonférences ont deux points communs A et B , sans coïncider, chacun de ces points est situé hors de la ligne des centres.*

THÉORÈME XXV.

Lorsque la distance OC des centres de deux cercles est égale à la somme de leurs rayons R et r , ces deux cercles se touchent extérieurement; et réciproquement.



1° Puisque la distance $OC = R + r$, si l'on prend, à partir du point O , une quantité $OA = R$, on aura $CA = r$; donc le point A est commun aux deux circonférences; donc elles se touchent extérieurement (22).

2° Soient O et C les centres de deux cercles qui se touchent extérieurement au point A . Le point de contact A est situé sur la droite OC (23, cor.); donc la distance $OC = OA + CA$.

THÉORÈME XXVI.

Lorsque la distance OC des centres de deux cercles est égale à la différence de leurs rayons R et r , ces deux cercles se touchent intérieurement ; et réciproquement.

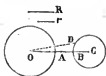


1° Puisque la distance $OC = R - r$, on a $R = OC + r$; donc, si l'on prend, sur le prolongement de OC , une quantité $CA = r$, on aura $OA = R$; donc le point A est commun aux deux circonférences ; donc elles se touchent intérieurement (22).

2° Soient O et C les centres de deux cercles qui se touchent intérieurement au point A . La droite OC prolongée passera par le point A (23, cor.) ; donc la distance $OC = OA - CA$.

THÉORÈME XXVII.

Lorsque la distance OC des centres de deux cercles est plus grande que la somme de leurs rayons R et r , les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et leurs circonférences n'ont aucun point commun ; et réciproquement.



1° Puisqu'on a $OC > R + r$, si l'on prend $OA = R$ et $CB = r$, le point A sera situé entre O et C , et le point B entre A et C . Cela étant, joignons le centre O à un point quelconque D de la circonférence CB . L'oblique OD est plus grande que la normale OB (21) ; or $OB > OA$,

donc, à plus forte raison, $OD > OA$; donc le point D est extérieur au cercle OA. On prouverait de même qu'un point quelconque de la circonférence OA est extérieur au cercle CB; donc les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et leurs circonférences n'ont aucun point commun.

2° Soient O et C les centres de deux cercles extérieurs l'un à l'autre, et dont les circonférences n'ont aucun point commun. La droite OC, qui joint les centres, rencontre les circonférences en des points A et B (ax. 10), et l'on a $OC = OA + CB + AB$; donc $OC > OA + CB$.

THÉORÈME XXVIII.

Lorsque la distance OC des centres de deux cercles est moindre que la différence de leurs rayons R et r, l'un des cercles est intérieur à l'autre, et leurs circonférences n'ont aucun point commun; et réciproquement.



1° Puisqu'on a $OC < R - r$ ou $R > OC + r$, si l'on prend $OA = R$ et $CB = r$, le point A sera situé sur le prolongement de OC, et le point B entre A et C. Cela étant, joignons le centre O à un point quelconque D de la circonférence CB. L'oblique OD est plus courte que la normale OB (21, rem.); or $OB < OA$, donc, à plus forte raison, $OD < OA$; donc le point D est intérieur au cercle OA; donc le cercle CB est intérieur au cercle OA, et leurs circonférences n'ont aucun point commun.

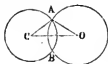
2° Soient C et O les centres de deux cercles, l'un intérieur à l'autre, et dont les circonférences n'ont aucun point commun. La droite OC prolongée rencontre les circonférences en des points B et A (ax. 4), et l'on a $OC = OA - CB - AB$; donc $OC < OA - CB$.

THÉORÈME XXIX.

Lorsque la distance des centres de deux cercles est moindre que la somme des rayons R et r , et plus grande que leur différence, les deux cercles se coupent; et réciproquement.



1° A partir de l'extrémité A du rayon OA , égal à R et dirigé vers le centre C du cercle r , prenons, sur la ligne des centres, $AD = AD' = r$; nous aurons $OD = OA + AD = R + r$ et $OD' = OA - AD' = R - r$; or, par hypothèse, la distance OC est moindre que OD et plus grande que OD' , donc le point C est situé entre D et D' , c'est-à-dire au point A , ou entre A et D , ou entre A et D' . Dans le premier cas, la circonférence r coupe la direction du diamètre AA' aux points D et D' ; dans le second, elle la coupe en deux points situés l'un sur le prolongement de AD , l'autre entre A et D' ; dans le troisième, elle la coupe en deux points situés l'un entre A et D , l'autre entre A' et D' ; donc, dans tous les cas, la circonférence r a deux points, l'un extérieur et l'autre intérieur au cercle OA ; donc elle coupe la circonférence OA en deux points (ax. 10).



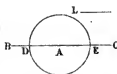
2° Soient O et C les centres de deux circonférences qui se coupent aux points A et B . Le point A étant situé hors de la ligne OC (24, cor.), le triangle ACO donne $OC < OA + CA$, et $OC > OA - CA$ (liv. II, 24).

COROLLAIRE. Deux circonférences, qui ont deux points communs A et B sans coïncider, se coupent mutuellement en chacun de ces points. Car, le point A étant situé hors de la ligne OC (24 cor.), le triangle AOC donne $OC < OA + CA$, et $OC > OA - CA$.

PROBLÈMES RELATIFS AUX TROIS PREMIERS LIVRES.

PROBLÈME PREMIER.

Étant donné un point A sur une droite indéfinie BC, trouver, sur la même droite, un point dont la distance au premier soit égale à une droite donnée L.

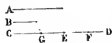


Du point A comme centre, et d'un rayon égal à L, décrivons une circonférence, qui rencontre la ligne BC en deux points D et E (ax. 4); chacun de ces points satisfait à l'énoncé.

Car on a, par construction, $AD = AE = L$.

PROBLÈME II.

Étant données deux droites finies A et B, trouver une droite égale à leur somme ou à leur différence.



Traçons la droite indéfinie CD; prenons, sur cette droite, $CE = A$, puis, $EF = EG = B$ (1): les deux lignes CF et CG satisfont au problème.

Car on a $CF = CE + EF = A + B$, et $CG = CE - EG = A - B$.

REMARQUE. On trouvera de même une droite égale à la somme de tant de droites données qu'on voudra, ou au produit d'une droite donnée par un nombre entier.

PROBLÈME III.

Étant donnée une droite finie AB , tracer une perpendiculaire sur le milieu de cette droite.



Des points A et B , comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de AB , décrivons deux circonférences qui se coupent en des points C et D (th. 29); puis, menons CD , qui sera la droite demandée.

Car, les deux cercles qui se coupent aux points C et D étant égaux entre eux, la corde CD est perpendiculaire sur le milieu de la droite AB qui joint leurs centres (th. 24, rem.).

REMARQUE. La même construction peut servir à diviser une droite AB en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME IV.

Trouver un point qui soit également distant de trois points donnés A , B , C , non en ligne droite; puis, décrire une circonférence qui passe par ces trois points.



Menons DE perpendiculaire sur le milieu de la droite AB (3), et FG perpendiculaire sur le milieu de la droite AC ; ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point O , qui est le point demandé (liv. II, 30).

Cela étant, si, du point O , comme centre, avec un rayon égal à la distance OA , on décrit une circonférence, elle passera par les trois points A , B , C .

PROBLÈME V.

Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné.

Prenons trois points quelconques A, B, C, sur la circonférence du cercle ou sur l'arc donné; puis, cherchons le point également distant de A, B, C (4); ce point sera le centre du cercle ou de l'arc donné (th. 2.).

PROBLÈME VI.

Par un point A, donné sur une droite BC, mener une perpendiculaire à cette droite.



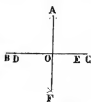
Prenons, sur BC, les deux points D et E à égale distance de A (4); des points D et E comme centres, et d'un rayon plus grand que AD, décrivons deux arcs qui se coupent en un point F (th. 29); la droite AF est la perpendiculaire demandée.

En effet, la droite AF, menée du milieu de la base DE au sommet du triangle isocèle FDE, est perpendiculaire à cette base (liv. II, 12).

REMARQUE. La même construction sert à mener par le point A, donné sur BC, une droite AF qui fasse avec BC un angle droit BAF.

PROBLÈME VII.

D'un point A, donné hors d'une droite BC, mener une perpendiculaire à cette droite.



Prenons, sur BC, deux points quelconques D et E; de ces points, comme centres, avec les rayons DA, EA, décrivons deux circonférences qui se rencontrent au point A et en un second point F (th. 23); puis, menons AF, qui sera la perpendiculaire demandée.

Car la ligne BC des centres est perpendiculaire sur la

corde AF (th. 24); donc, réciproquement, AF est perpendiculaire à BC.

PROBLÈME VIII.

Par un point donné, mener une tangente à un cercle donné.

Deux cas peuvent se présenter, selon que le point donné est situé sur la circonférence ou hors du cercle.

1° Joignons le centre du cercle au point donné; puis, à l'extrémité du rayon, élevons une perpendiculaire, qui sera la tangente demandée (th. 3).

2° Prenons le milieu de la droite qui joint le centre au point donné (3); sur cette droite, comme diamètre, décrivons une circonférence qui rencontre la circonférence donnée en deux points: les droites, menées de ces points au point donné, satisfont au problème (th. 19).

PROBLÈME IX.

Inscrire, dans un cercle donné O, une droite égale à une droite donnée L, et qui ait une de ses extrémités en un point A donné sur la circonférence.



Du point A comme centre, avec un rayon égal à L, décrivons une circonférence qui coupe la circonférence donnée en deux points B et C; puis, menons AB, AC; chacune de ces cordes satisfait à l'énoncé.

Car on a, par construction, $AB = AC = L$.

REMARQUE. Lorsque la droite donnée L est plus petite que le diamètre AD, la circonférence décrite du point A comme centre rencontre la circonférence O en deux points (th. 29), et il y a deux cordes qui satisfont au problème,

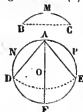
Lorsque L est égale au diamètre AD , les deux circonférences sont tangentes intérieurement au point D (th. 26), et ce diamètre est la seule corde qui réponde à l'énoncé.

Enfin, lorsque la droite L est plus grande que le diamètre AD , l'un des cercles est intérieur à l'autre sans que leurs circonférences aient aucun point commun (th. 28), et le problème est impossible (th. 10).

PROBLÈME X.

Étant donné un point A sur une circonférence (O) , trouver, sur la même circonférence, un second point tel que l'arc, qui joindra ces deux points, soit égal à un arc donné BMC de même rayon que celui du cercle.

Inscrivons, dans le cercle donné, les droites AD , AE égales à BC (9) : les deux points D et E satisfont à l'énoncé.



Car, puisque les cordes AD , AE , sont égales à BC , chacun des arcs AND , APE est égal à l'arc donné BMC (th. 11).

REMARQUE. Lorsque l'arc BMC est une demi-circonférence, la corde BC est égale au diamètre AF , et le point F satisfait seul au problème (9).

PROBLÈME XI.

Étant donnés deux arcs A et B de même rayon, trouver un arc égal à leur somme ou à leur différence.



D'un point quelconque O , comme centre, avec un rayon égal à celui des arcs donnés, décrivons une circonférence; prenons, sur cette ligne, un arc $CD = A$ (10), puis, $DE = DF = B$; les deux arcs CE , CF satisfont au problème.

Car on a $CE = CD + DE = A + B$, et $CF = CD - DF = A - B$.

REMARQUE. On trouvera de même un arc égal à la somme de tant d'arcs donnés qu'on voudra, ou au produit d'un arc donné par un nombre entier.

PROBLÈME XII.

Diviser un arc donné AB en deux parties égales.

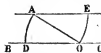


Menons la droite CD perpendiculaire sur le milieu de la corde AB (3). Cette droite divisera l'arc AB en deux parties égales (th. 8, cor. 1).

REMARQUE. La même construction sert à diviser un arc donné en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME XIII.

Par un point donné A, mener une parallèle à une droite donnée BC.



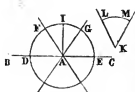
Prenons, sur BC, un point quelconque O; du point O, comme centre, et du rayon OA, décrivons un arc qui rencontre BC en D; du point A comme centre, avec le même rayon, décrivons un second arc; prenons, sur cet arc, une quantité OE = AD (10); puis, menons AE, qui sera la parallèle demandée.

Car, puisque l'arc EO = AD, l'angle au centre EAO = AOD (th. 6); or ces deux angles sont alternes-internes; donc AE est parallèle à BC.

PROBLÈME XIV.

Par un point A, donné sur une droite BC, mener

une droite qui fasse avec la première un angle égal à l'angle donné K.



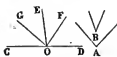
Du point K, comme centre, et d'un rayon quelconque, décrivons l'arc LM terminé aux deux côtés de l'angle; du point A, comme centre, avec le même rayon, décrivons une circonférence qui rencontre la droite BC aux points D et E; prenons l'arc $DF = EG = LM$; puis, menons AF et AG: chacune de ces droites satisfait au problème.

Car les angles au centre DAF, EAG, correspondants aux arcs DF, EG, égaux à l'arc LM, sont égaux à l'angle donné K (th. 6).

REMARQUE. Lorsque l'angle donné est droit, les deux points F et G se réunissent au point I, milieu de l'arc DGE (th. 6, cor.), et la droite AI répond seule à l'énoncé (liv. 1, 1).

PROBLÈME XV.

Étant donnés deux angles A et B, trouver un angle égal à leur somme ou à leur différence.



Traçons la droite indéfinie CD; prenons, sur CD, un point quelconque O; par le point O, menons la droite OE qui fasse avec CD l'angle $COE = A$ (14), puis, les deux droites OF, OG, qui fassent avec OE l'angle $EOF = EOG = B$: les angles COF et COG satisfont à l'énoncé.

Car on a $COF = COE + EOF = A + B$, et $COG = COE - EOG = A - B$.

REMARQUE. La même construction sert à trouver un angle égal à la somme de tant d'angles donnés qu'on voudra ou au produit d'un angle donné par un nombre entier.

PROBLÈME XVI.

Un angle K étant donné, trouver son supplément et son complément.



1° Traçons la droite indéfinie AB ; prenons, sur AB, un point quelconque C, et faisons l'angle $ACD = K$ (14) : l'angle BCD satisfait au problème.

Car, la ligne ACB étant droite, on a $ACD + BCD = \text{deux droits}$, ou $K + BCD = \text{deux droits}$.

2° Faisons, comme précédemment, l'angle $ACD = K$; puis, menons CE perpendiculaire sur AB (6) : l'angle DCE répond à l'énoncé.

Car, ACE étant droit, on a $ACD + DCE = \text{un droit}$, ou $K + DCE = \text{un droit}$.

PROBLÈME XVII.

Étant donnés deux angles d'un triangle, trouver le troisième.

Faisons la somme des deux angles donnés (15) ; le supplément de cette somme (16) sera l'angle demandé.

Car les trois angles d'un triangle, pris ensemble, valent deux angles droits.

PROBLÈME XVIII.

Diviser un angle donné K en deux parties égales.



Du point K, comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons une circonférence qui rencontre les côtés de l'angle en deux points A et B ; des points A et B, comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de la corde AB, décrivons deux arcs qui se ren-

contrent en un point C (th. 29) : la droite CK satisfait au problème.

Car cette droite, étant perpendiculaire au milieu de la corde AB (liv. II, 29), divise l'arc AB (th. 8) et, par suite, l'angle K en deux parties égales (th. 6).

REMARQUE. La même construction sert à diviser un angle donné en 4, 8, 16, etc., parties égales.

PROBLÈME XIX.

Étant donné un triangle ABC, trouver dans l'intérieur un point également distant des trois côtés ; puis, inscrire un cercle dans le triangle proposé.



Divisons deux angles quelconques du triangle ABC en deux parties égales (18) ; les bissectrices se rencontreront en un point O, qui sera le point demandé (liv. II, th. 32).

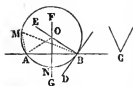
Cela étant, abaissons la perpendiculaire OP sur AB ; puis, du point O, comme centre, et du rayon OP, décrivons une circonférence qui passera par les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés du triangle, et répondra à l'énoncé.

Car chacun des côtés du triangle, étant perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est une tangente à la circonférence (th. 3).

REMARQUE. O étant le seul point intérieur également distant des trois côtés (liv. II, th. 32), tout autre cercle, inscrit dans le même triangle ABC, se confondrait avec le premier : donc le problème n'admet qu'une solution.

PROBLÈME XX.

Sur une droite donnée AB, décrire un segment capable d'un angle donné C.



Au point B, faisons l'angle $ABD = C$; menons BE perpendiculaire à BD, et FG perpendiculaire sur le milieu de AB; les deux droites BE, FG se rencontreront en un point O (liv. I, 14) : du point O, comme centre, avec le rayon OB, décrivons une circonférence qui passera par le point A (liv. II, 29), et déterminera, sur AB, le segment demandé AMB.

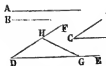
Il s'agit de prouver que tout angle $\widehat{AMB}$, inscrit dans ce segment, est égal à l'angle donné C (déf. 12).

En effet, la droite BD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB, est une tangente; donc ABD est la moitié de l'angle au centre AOB correspondant à l'arc ANB (th. 16); mais l'angle inscrit AMB est aussi la moitié de AOB (th. 15); donc $AMB = ABD = C$.

REMARQUE. Lorsque l'angle donné est droit, le segment cherché est un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre (th. 15, cor. 2).

PROBLÈME XXI.

Étant donnés deux côtés A et B d'un triangle, et l'angle C qu'ils comprennent, décrire le triangle.

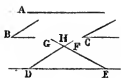


Traçons la droite indéfinie DE; en un point quelconque D de cette droite, faisons l'angle EDF = C; prenons, sur DE, une quantité DG = A; et, sur DF, une quantité DH = B; le triangle DGH répond à l'énoncé.

Car on a, par construction, $DG = A$, $DH = B$ et $D = C$.

PROBLÈME XXII.

Étant donnés un côté A et deux angles B et C d'un triangle, décrire le triangle.



Les angles B et C seront tous deux adjacents au côté A ou l'un adjacent et l'autre opposé à ce côté ; dans ce dernier cas, on cherchera le troisième angle du triangle (17), et l'on aura ainsi les deux angles adjacents au côté donné.

Cela étant, traçons la droite indéfinie DE ; prenons, sur cette droite, une quantité $DE = A$; faisons l'angle $EDF = B$, et l'angle $DEG = C$: les deux droites DF, EG se rencontreront en un point H, et DEH sera le triangle demandé.

Car on a, par construction, le côté $DE = A$, l'angle $D = B$ et l'angle $E = C$.

REMARQUE. Lorsque la somme des angles donnés B et C est moindre que deux droits, les deux lignes DF, EG se rencontrent du côté de la droite DE, où sont formés les angles D et E (liv. 1, 16) : alors le problème est possible.

Si la somme $B + C$ était égale ou supérieure à deux droits, ces deux lignes seraient parallèles (liv. 1, 9) ou se rencontreraient de l'autre côté de DE ; alors le problème serait impossible (liv. 11, 3).

PROBLÈME XXIII.

Étant donnés les trois côtés A, B, C d'un triangle, décrire le triangle.



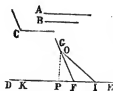
Traçons la droite DE égale au côté A ; du point D, comme centre, avec un rayon égal au côté B, décrivons un arc ; du point E, comme centre, avec un rayon égal au troisième côté C, décrivons un autre arc qui rencontre le premier en un point F : le triangle DEF satisfait à l'énoncé.

Car, par construction, le côté $DE = A$, le côté $DF = B$ et le côté $EF = C$.

REMARQUE. Pour que le problème soit possible, il est nécessaire et il suffit que les arcs décrits des points D et E, comme centres, se coupent, ce qui exige que la distance DE soit moindre que la somme des rayons B et C, et plus grande que leur différence (th. 29), ou, autrement, que l'un quelconque des trois côtés donnés soit plus petit que la somme des deux autres.

PROBLÈME XXIV.

Étant donnés deux côtés A et B d'un triangle et l'angle C opposé au côté A, décrire le triangle.



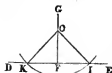
Traçons la droite indéfinie DE; en un point quelconque F de DE, faisons l'angle $EFG = C$; prenons, sur FG, une quantité $FO = B$; et, du point O, comme centre, avec un rayon égal au côté A, décrivons un arc qui rencontre EF en un point I: le triangle OFI satisfait à l'énoncé.

Car, par construction, le côté $OI = A$, le côté $FO = B$, et l'angle $OFI = C$.

REMARQUE. L'angle donné C pouvant être obtus, droit ou aigu, nous aurons trois cas à considérer.

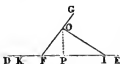
1° L'angle EFG étant obtus, la perpendiculaire OP, abaissée du point O sur DE, rencontre le prolongement FD de EF (liv. II, 3); cela étant, si le côté A, opposé à l'angle EFG, est plus grand que le côté OF = B; on aura, à plus forte raison, $A > OP$; donc la circonférence O coupera la droite DE en deux points I et K dont l'un sera situé sur le côté EF de l'angle EFG (liv. II, 27); alors OFI est le seul triangle qui satisfasse à l'énoncé.

Si l'on avait $A = B$ ou $A < B$, le problème serait impossible.

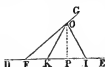


2° L'angle C étant droit, la perpendiculaire OP coïncide avec OF : cela étant, si l'on a $A > B$, la circonférence O coupera DE en deux points I et K, et les deux triangles rectangles OFI, OFK satisferont au problème, mais ne donneront qu'une seule solution ; car ils ont l'hypoténuse $OI = OK$, le côté OF commun, et, par suite, sont égaux entre eux (liv. II, 14).

Si l'on avait $A = B$ ou $A < B$, le problème serait impossible.



3° L'angle EFG étant aigu, la perpendiculaire OP rencontre FE : cela posé, si l'on a $A > B$ ou $A = B$, la circonférence O rencontrera DE en deux points, dont l'un sera situé sur le prolongement PE de FP, et le triangle OFI satisfera seul à l'énoncé.

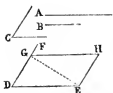


Mais, si l'on a $A < B$ et $A > OP$, la circonférence O rencontrera DE en deux points I et K, situés sur le côté FE, et les triangles OFI, OFK satisferont au problème.

Enfin, si l'on a $A = OP$ ou $A < OP$, le problème admettra une seule solution ou sera impossible.

PROBLÈME XXV.

Étant donnés deux côtés consécutifs A et B d'un parallélogramme, et l'angle C qu'ils comprennent, décrire le parallélogramme.

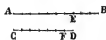


Traçons la droite DE égale au côté A ; faisons l'angle $EDF = C$; prenons, sur DE , une quantité $DG = B$; du point G , comme centre, avec un rayon égal à DE , décrivons un arc ; du point E , comme centre, avec un rayon égal à DG , décrivons un autre arc qui coupe le premier (th. 29), en un point H situé de l'autre côté de GE , par rapport au point D : le quadrilatère $GDEH$ satisfait à l'énoncé.

Car, par construction, le côté $DE = A$, le côté $DG = B$, et l'angle $D = C$; de plus, les côtés opposés sont égaux ; donc la figure est un parallélogramme (liv. II, 17).

PROBLÈME XXVI.

Deux droites commensurables AB , CD étant données, trouver leur plus grande commune mesure.



Portons la plus petite droite CD sur la plus grande, autant de fois que cela est possible, et supposons que AB contienne une fois CD avec un reste $BE < CD$; portons de même le reste BE sur CD , et supposons qu'il y soit contenu deux fois avec un reste $DF < BE$; portons le second reste DF sur BE , et supposons qu'il y soit contenu trois fois exactement ; DF sera la plus grande commune mesure des deux droites AB , CD . Car on l'a obtenue en suivant la règle que prescrit l'arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.

REMARQUE 1. Pour en déduire le rapport de AB à CD , observons qu'on a $BE = 3DF$, $CD = 2BE + DF = 6DF + DF = 7DF$, $AB = CD + BE = 7DF + 3DF = 10DF$; donc $AB : CD :: 10 : 7$.



REMARQUE 2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle. Pour trouver la plus grande commune mesure de l'hypoténuse AC et du côté AB de l'angle droit, portons AB sur AC en décrivant du point A , comme centre, avec un rayon égal à AB ,

un arc qui rencontre AC en D . Nous aurons $AC - AB = CD < AB$; ensuite, pour trouver combien de fois le reste CD est contenu dans AB ou BC , menons, à l'extrémité D de l'arc BD , une tangente, qui rencontre BC en E , et prenons $EF = DE$: la tangente DE étant perpendiculaire sur AD (th. 3) et l'angle C égal à la moitié d'un angle droit (liv. II, 8), l'angle CED vaut aussi un demi-angle droit ; donc $CDE = CED$, et, par suite, $DE = CD$ (liv. II, 10) ; de plus, les tangentes DE , BE sont égales (th. 19), donc $CD = DE = BE = EF$; ce qui montre que le côté BC de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle contient deux fois la différence CD entre l'hypoténuse et ce côté avec un reste CF moindre que cette différence ; or CDE est aussi un triangle rectangle isocèle, et $CF = CE - CD$; donc CF est contenu deux fois dans CD avec un reste moindre que CF , et ainsi de suite. On voit que l'opération ne se terminera jamais, et qu'ainsi *l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle et le côté de l'angle droit ou, autrement, la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables.*

PROBLÈME XXVII.

Deux arcs ou deux angles commensurables étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Un arc pouvant être porté sur un arc de même rayon (10), et un angle sur un angle (14), comme une ligne droite sur une ligne droite, on trouvera la plus grande-commune me-

sure des deux arcs ou des deux angles donnés comme on a trouvé celle de deux droites (26).

PROBLÈME XXVIII.

Diviser une droite donnée en autant de parties égales qu'on voudra.



Soit proposé de diviser la droite AB en cinq parties égales.

Menons la droite indéfinie AK; prenons, sur AK, une grandeur quelconque AC; portons AC quatre fois sur CK, à partir du point C; joignons le dernier point G de division à l'extrémité B, et menons CH parallèle à BG (13) jusqu'à la rencontre de AB en H; la droite AH sera le cinquième de AB, de sorte qu'en portant AH trois fois sur BH, à partir du point H, la droite AB sera divisée aux points H, I, L, M en cinq parties égales.

En effet, le côté AG du triangle ABG étant divisé aux points C, D, E, F en cinq parties égales, les droites menées par ces points, parallèlement à la base BG, divisent l'autre côté AB en cinq parties égales (liv. II, 22); donc $AH = \frac{1}{5} AB$.

REMARQUE. On en déduit le moyen de multiplier une droite donnée par une fraction. Ainsi, pour obtenir le produit de AB par la fraction $\frac{7}{5}$, on prend $AH = \frac{1}{5} AB$, puis, on multiplie AH par le nombre 7 (2).

PROBLÈME XXIX.

Diviser une droite donnée AB en parties qui soient entre elles comme des nombres donnés 2, 3, 4.



Traçons la droite indéfinie AK ; prenons, sur AK , une grandeur quelconque AC ; portons AC huit fois sur CK , à partir du point C ; joignons le dernier point F de division à l'extrémité B ; et, par les second et cinquième points de division D et E , menons DG , EH parallèles à FB ; la droite AB sera divisée aux points G et H de la manière demandée.

En effet, le côté AF du triangle ABF étant divisé en neuf parties égales, les droites menées par les points de division, parallèlement à la base BF , divisent l'autre côté AB en neuf parties égales (liv. II, 22) ; de plus, AG contient deux de ces parties, GH en contient trois et HB en contient quatre ; donc les droites AG , GH , HB sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4.

PROBLÈME XXX.

Trouver une valeur approchée du rapport de deux droites données AB , CD .

Soit proposé, par exemple, de trouver le rapport de AB à CD à moins d'un dixième.



Prenons $CE = \frac{1}{10} CD$ (28) ; portons CE sur AB autant de fois qu'elle peut y être contenue, sept fois par exemple, avec un reste $BF < CE$; les nombres $\frac{7}{10}$ et $\frac{8}{10}$ exprimeront, l'un par défaut et l'autre par excès, le rapport de AB à CD à moins d'un dixième.

Car on a, par la construction précédente, $AB > CD \times \frac{7}{10}$ et $AB < CD \times \frac{8}{10}$; donc le rapport de AB à CD est compris entre $\frac{7}{10}$ et $\frac{8}{10}$.

REMARQUE. On trouvera de même une valeur approchée du rapport de deux arcs ou de deux angles donnés, lorsque le dénominateur de la fraction, qui indique le degré d'approximation, est une puissance de 2 (12 et 18) : mais le procédé suivant est plus commode et d'ailleurs applicable à tous les cas.

PROBLÈME XXXI.

Trouver une valeur approchée du rapport de deux arcs ou de deux angles donnés.

Soient A et B les deux arcs ou les deux angles donnés. Pour trouver le rapport de A à B, par exemple, à moins d'un septième, multiplions A par 7 (11 et 15) ; portons B sur 7 A autant de fois que cela est possible, et supposons qu'il y soit contenu quinze fois avec un reste ; nous aurons $7A > B \times 15$ et $7A < B \times 16$; donc $A > B \times \frac{15}{7}$ et $A < B \times \frac{16}{7}$; donc les nombres $\frac{15}{7}$ et $\frac{16}{7}$ expriment, l'un par défaut et l'autre par excès, le rapport de A à B, à moins d'un septième.

REMARQUE. Le même procédé peut aussi être appliqué à la recherche d'une valeur approchée du rapport de deux droites données.



LIVRE IV.

LES POLYGONES SEMBLABLES

ET LA MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

1. Deux rapports incommensurables sont *égaux*, lorsque l'antécédent du premier rapport contient une partie aliquote de son conséquent, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que l'antécédent du second rapport contient la même partie aliquote de son conséquent.

2. Deux polygones sont *semblables*, lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les côtés homologues proportionnels (liv. II, déf. 34 et 35).

3. Diviser une droite en *moyenne et extrême parties*, c'est diviser cette droite en deux parties, dont l'une soit moyenne proportionnelle entre la droite entière et l'autre partie.

THÉORÈME PREMIER.

La droite DE menée dans un triangle, parallèlement à la base BC, divise les côtés AB, AC en parties proportionnelles.



Supposons d'abord que les deux droites AD, DB soient commensurables, et qu'on ait, par exemple, $AD : DB :: 2 : 3$.

Divisons DB en trois parties BF, FG, GD égales entre elles, et portons BF sur AD, autant de fois que cela est possible : en vertu

de l'hypothèse, BF sera contenue exactement deux fois dans AD, et, par suite, AB sera divisé en parties égales aux points F, G, D, H; donc les droites menées par ces points, parallèlement à BC, divisent le côté AC en parties égales (liv. II, 22); la droite EC contient trois de ces parties, et la droite AE en contient deux; donc on a la proportion $AE : EC :: 2 : 3$ ou $:: AD : DB$.



En second lieu, lorsque les deux droites AD, DB sont incommensurables, on a encore la proportion $AD : DB :: AE : EC$ (déf. 1).

Démontrons d'abord que, si l'on a $AD < DB$, on aura aussi $AE < EC$.

En effet, si l'on prend $DF = AD$ et qu'on mène FG parallèle à BC, on aura $AE = EG$ (liv. II, 22); or $EG < EC$, donc $AE < EC$.



Cela étant, divisons DB, par exemple, en cinq parties BF, FG, etc., égales entre elles; portons BF sur AD, à partir du point D, autant de fois que cela est possible, et supposons que AD contienne trois fois BF avec un reste $AK < BF$. Si, par tous les points de division F, G, H... I, K,

on mène des parallèles à BC jusqu'à la rencontre de AC, la droite EC sera divisée en cinq parties égales (liv. II, 22), et la droite AE contiendra trois de ces parties avec un reste $AP < OP$, puisque $AK < IK$; donc la droite AD contient la cinquième partie de DB autant de fois que AE contient la cinquième partie de EC; or le nombre 5 des divisions de la droite DB a été pris arbitrairement; donc AD contient une partie aliquote de DB, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que AE contient la même partie aliquote de EC; donc $AD : DB :: AE : EC$ (déf. 1).

REMARQUE. On prouverait de même que la droite menée dans un trapèze, parallèlement aux bases, divise les côtés en parties proportionnelles.



COROLLAIRE 1. De la proportion $AD : DB :: AE : EC$ on déduit 1° $AD : AE :: DB : EC$; 2° $AD + DB : AE + EC :: AD : AE :: DB : EC$ ou $AB : AC :: AD : AE :: DB : EC$.

COROLLAIRE 2. Lorsque, dans un triangle ABC , on mène tant de droites qu'on voudra DE, FG, HK , etc., parallèlement à la base BC , ces droites divisent les côtés AB, AC en parties proportionnelles. Car, dans le triangle AFG , où la droite DE est parallèle à la base FG , on a $AD : AE :: DF : EG$; pareillement, dans le trapèze $DHKE$, où la droite FG est parallèle aux bases, on a $DF : EG :: FH : GK$, et ainsi de suite.

THÉORÈME II.

Réciproquement, toute droite, qui divise les côtés d'un triangle en parties proportionnelles, est parallèle à la base.



Soit la proportion $AD : AE :: DB : EC$ ou $AB : AC :: AD : AE$ (1, cor. 1); je dis que DE est parallèle à BC .

Car, si cela n'est pas, et qu'on mène DK parallèle à BC , on aura $AB : AC :: AD : AK$ (1). Cette proportion et la précédente, ayant trois termes égaux chacun à chacun, les derniers termes AE, AK seraient aussi égaux entre eux, ce qui est absurde; donc DE est parallèle à BC .

REMARQUE. On prouverait de même que toute droite, qui divise les côtés d'un trapèze en parties proportionnelles, est parallèle aux bases.

THÉORÈME III.

Toute droite DE menée dans un triangle ABC , pa-

rallelément à la base, forme avec les côtés un second triangle ADE semblable au premier.



En effet, les triangles ADE, ABC ont l'angle A commun, les angles ADE et ABC, AED et ACB, égaux comme correspondants : de plus, la droite DE étant parallèle à la base BC, on a $AB : AD :: AC : AE$ (1) ; et, si l'on mène EF parallèle à AB jusqu'à la rencontre de BC en F, on aura aussi la proportion $AC : AE :: BC : BF$; or les droites BF et DE sont égales, comme côtés opposés d'un parallélogramme ; donc $AC : AE :: BC : DE$; donc les triangles ADE, ABC sont semblables (déf. 2).

REMARQUE. Dans les triangles semblables, les côtés homologues sont opposés à des angles égaux. Car, lorsque deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, le troisième angle de l'un est égal au troisième de l'autre (liv. II, 5).

THÉORÈME IV.

Lorsque deux triangles ont les angles égaux chacun à chacun, les côtés homologues sont proportionnels.



Soient ABC, ADE les triangles proposés, qu'on suppose placés de manière qu'ils aient un angle commun A, et que les autres angles égaux ABC et ADE, ACB et AED soient correspondants.

Puisque l'angle $ABC = ADE$, la droite DE est parallèle à la base BC (liv. 1, 8) ; donc $AB : AD :: AC : AE :: BC : DE$ (3).

REMARQUE. Deux triangles, qui ont deux angles égaux chacun à chacun, sont semblables.

COROLLAIRE. La droite DE, parallèle à la base d'un trian-



gle ABC, forme avec les prolongements des côtés AB, AC, un second triangle ADE semblable au premier. Car les angles B et D, C et E sont égaux comme alternes-internes.

THÉORÈME V.

Réciproquement, lorsque deux triangles ABC, DEF ont les côtés proportionnels, les angles opposés aux côtés proportionnels sont égaux entre eux.



Soit $AB : DE :: AC : DF :: BC : EF$.

Prenons $AG = DE$, $AH = DF$, et menons GH. Si, dans la proportion $AB : DE :: AC : DF$, on remplace DE par AG et DF par AH, on aura $AB : AG :: AC : AH$; donc GH est parallèle à BC (2); donc $B = AGH$, $C = AHG$ (liv. 1, 15) et $AB : AG :: BC : GH$ (3) ou $AB : DE :: BC : GH$; mais, par hypothèse, $AB : DE :: BC : EF$; donc $GH = EF$, et les triangles AGH, DEF ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc $A = D$, AGH ou $B = E$, AHG ou $C = F$.

THÉORÈME VI.

Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, les autres angles, opposés aux côtés proportionnels, sont égaux entre eux, et les deux triangles sont semblables.



Soient ABC, ADE les triangles proposés, qu'on suppose placés de manière qu'ils aient un angle commun A, et que les côtés proportionnels AB et AD, AC et AE soient situés dans la même direction.

On a, par hypothèse, $AB : AD :: AC : AE$;

donc la droite DE est parallèle à la base BC (2); donc $B = ADE$, $C = AED$ (liv. I, 15), et les deux triangles sont semblables (3).

THÉORÈME VII.

Lorsque deux triangles ont les côtés parallèles chacun à chacun, les angles opposés aux côtés parallèles sont égaux entre eux, et les deux triangles sont semblables.

Soient A, B, C et a, b, c les angles des deux triangles proposés, dans lesquels on suppose que A et a , B et b , C et c ont les côtés parallèles chacun à chacun : on aura $A = a$, $B = b$, $C = c$.

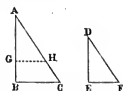
En effet, les angles A et a , ayant les côtés parallèles chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires (liv. I, 18); il en est de même des angles B et b , C et c . Or, supposons que deux angles de l'un des triangles soient les suppléments de deux angles de l'autre, de sorte qu'on ait, par exemple, $A + a =$ deux droits et $B + b =$ deux droits; on aurait, par suite, $A + a + B + b =$ quatre droits, ce qui est impossible, puisque la somme de tous les angles des deux triangles est égale à quatre angles droits (liv. II, 5) : donc les triangles proposés ont deux angles égaux chacun à chacun, et, par conséquent, le troisième angle de l'un est égal au troisième de l'autre; donc $A = a$, $B = b$, $C = c$ et les deux triangles sont semblables.

REMARQUE. On prouverait de même que : *lorsque deux triangles ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, les angles opposés aux côtés perpendiculaires sont égaux entre eux* (liv. I, 19), *et les deux triangles sont semblables.*

THÉORÈME VIII.

Deux triangles rectangles ABC, DEF, qui ont l'hy-

poténuse et un côté de l'angle droit proportionnels, sont semblables.

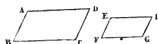


Soit la proportion $AC : DF :: AB : DE$. Prenons $AG = DE$, $AH = DF$ et menons GH .

Si, dans la proportion précédente, on remplace DE par AG et DF par AH , on aura $AC : AH :: AB : AG$; donc GH est parallèle à BC (2); donc l'angle $AGH = B$ (liv. I, 15) et le triangle AGH est semblable à ABC (3); or les triangles AGH , DEF ont l'hypoténuse $AH = DF$ et le côté $AG = DE$; donc ils sont égaux (liv. II, 14); donc DEF est semblable à ABC .

THÉORÈME IX.

Deux parallélogrammes, qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables.



Supposons qu'on ait l'angle $A = E$ et la proportion $AB : EF :: AD : EH$.

Les angles A et E étant égaux, leurs suppléments B et F (liv. I, 15) sont aussi égaux entre eux : on a de même $C = G$, $D = H$. De plus, les figures étant des parallélogrammes, le côté $CD = AB$, $GH = EF$, $BC = AD$, $FG = EH$ (liv. II, 17); donc $CD : GH :: AB : EF$ et $BC : FG :: AD : EH$; or $AB : EF :: AD : EH$, donc $AB : EF :: BC : FG :: CD : GH :: AD : EH$ et les deux parallélogrammes sont semblables (déf. 2).

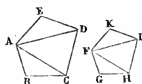
COROLLAIRE 1. *Deux rectangles qui ont les hauteurs proportionnelles aux bases sont semblables.*

COROLLAIRE 2. *Deux losanges, qui ont un angle égal, sont semblables.*

COROLLAIRE 3. *Tous les carrés sont semblables.*

THÉORÈME X.

Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles ABC et FGH , ACD et FHI , ADE et FIK , semblables chacun à chacun et situés de la même manière, sont semblables.

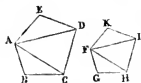


La similitude des triangles donne l'angle $B = G$, l'angle $ACB = FHG$, l'angle $ACD = FHI$ et, par suite, $ACB + ACD = FHG + FHI$, ou $BCD = GHI$: on trouvera de même $CDE = HIK$, et ainsi de suite. De plus, en comparant les côtés homologues, on a $AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI$, etc. ; donc les polygones $ABCDE$, $FGHIK$ sont semblables (déf. 2).

REMARQUE. Un polygone $ABCDE$ étant décomposé en triangles, si l'on conçoit un triangle FGH semblable à ABC , puis, un second triangle FHI semblable à ACD et ainsi de suite, il en résultera un polygone $FGHIK$ semblable à $ABCDE$. Donc : *étant donné un polygone d'un nombre quelconque de côtés, on peut concevoir tant de polygones qu'on voudra semblables au premier.*

THÉORÈME XI.

Réciproquement, deux polygones semblables $ABCDE$, $FGHIK$ sont décomposables en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et situés de la même manière.



Supposons qu'on ait $A = F$, $B = G$, $C = H$, etc., et $AB : FG :: BC : GH :: CD : HI$, etc.

D'un même sommet A , menons les diagonales AC , AD aux autres sommets; du sommet F , homologue à A , menons, de même, les diagonales FH , FI aux autres sommets. Les triangles ABC , FGH ont, par hypothèse, les angles B et G égaux, et compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables, et l'angle $ACB = FHG$ (6); on a d'ailleurs $BCD = GHI$; donc $BCD - ACB = GHI - FHG$, ou $ACD = FHI$; mais les triangles semblables ABC , FGH donnent la proportion $AC : FH :: BC : GH$, et on a, par hypothèse, $BC : GH :: CD : HI$; donc $AC : FH :: CD : HI$; donc les triangles ACD , FHI ont les angles ACD , FHI égaux et compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables. On prouverait de même la similitude des deux triangles ADE , FIK et ainsi de suite, quel que soit le nombre des côtés des deux polygones proposés.

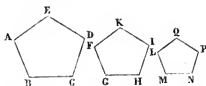
REMARQUE 1. Les diagonales homologues de deux polygones semblables sont entre elles comme les côtés homologues.

REMARQUE 2. On voit, par la démonstration précédente, que $n-2$ égalités d'angles et $n-2$ proportions ou égalités de rapports, c'est-à-dire $2n-4$ conditions, suffisent, lorsqu'elles sont convenablement choisies, pour déterminer la similitude de deux polygones de n côtés (10). Ainsi l'égalité de deux polygones d'un même nombre de côtés exige une condition de plus que leur similitude (liv. II, 7 et 9); ce qu'on pouvait prévoir: car si, dans deux polygones semblables, on suppose deux côtés homologues égaux, tous les autres côtés homologues seront aussi égaux entre eux (déf. 2) ainsi que les deux polygones proposés (liv. II, 7 et 9).

THÉORÈME XII.

Deux polygones $ABCDE$, $FGHIK$, semblables à

un troisième polygone LMNPQ, sont semblables entre eux.



Soit l'angle $A=L$,
 $B=M$, $C=N$, etc.,
 l'angle $F=L$, $G=M$,
 $H=N$, etc., $AB :$
 $LM :: BC : MN :: CD :$

NP , etc., et $FG : LM :: GH : MN :: HI : NP$, etc.

Les égalités $A=L$, $F=L$ donnent $A=F$; on a, de même, $B=G$, $C=H$, etc. De plus, les proportions $AB : LM :: BC : MN$, $FG : LM :: GH : MN$ ayant les mêmes conséquents, leurs antécédents forment la proportion $AB : FG :: BC : GH$; on a, pareillement, $BC : GH :: CD : HI$, et ainsi de suite; donc les polygones $ABCDE$, $FGHIK$ sont semblables entre eux (déf. 2).

THÉORÈME XIII.

Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues.

Soient A, B, C , etc., les côtés de l'un des polygones, et a, b, c , etc., les côtés homologues de l'autre.

On a la suite de rapports égaux $A : a :: B : b :: C : c$, etc., d'où l'on déduit la somme des antécédents ($A + B + C + \text{etc.}$) est à la somme des conséquents ($a + b + c + \text{etc.}$) comme un antécédent quelconque A est à son conséquent a , ou, antrement, le périmètre du premier polygone est à celui du second comme un côté quelconque du premier est à son homologue dans le second.

THÉORÈME XIV.

La bissectrice AD de l'angle au sommet d'un trian-

gle ABC partage la base en deux segments proportionnels aux côtés adjacents; et réciproquement.



1° Par le point B , menons BE parallèle à AD jusqu'à la rencontre de CA prolongé. Dans le triangle BCE , la droite AD étant parallèle à la base BE , on a la proportion $DB : DC :: AE : AC$ (1). Mais, puisque AD est parallèle à BE , les angles correspondants AEB , CAD sont égaux; il en est de même des angles alternes-internes ABE , BAD ; or $BAD = CAD$, donc $ABE = AEB$ et, par suite, le côté $AE = AB$ (liv. II, 10) : remplaçant AE par AB dans la proportion précédente, on a $DB : DC :: AB : AC$.

2° Réciproquement, lorsqu'on a la proportion $DB : DC :: AB : AC$, la droite AD divise l'angle BAC en deux parties égales.

En effet, on a, comme précédemment, $DB : DC :: AE : AC$. Ces deux proportions ont trois termes égaux chacun à chacun; donc $AE = AB$ et, par suite, l'angle $ABE = AEB$ (liv. II, 8); mais, puisque AD est parallèle à BE , l'angle $BAD = ABE$ et l'angle $CAD = AEB$; donc $BAD = CAD$.

THÉORÈME XV.

Lorsque, dans un triangle ABC , on mène une parallèle DE à la base, et d'autres droites AF , AG , AH , etc., par le sommet, ces droites divisent proportionnellement la base et la parallèle à cette base.



Puisque DI est parallèle à la base BF du triangle ABF , on a la proportion $BF : DI :: AF : AI$ (3); de même, la droite IK étant parallèle à FG , on a $FG : IK :: AF : AI$; donc, à cause du rapport commun $AF : AI$, on aura $BF : DI :: FG : IK$;

on prouverait de même que $FG : IK :: GH : KL$, et ainsi de suite; donc les deux droites BC , DE sont divisées proportionnellement.

COROLLAIRE. Dans la suite de rapports égaux $BF : DI :: FG : IK :: GH : KL :: \text{etc.}$, on a $(BF + FG + GH + \text{etc.}) : (DI + IK + KL + \text{etc.}) :: BF : DI :: FG : IK \text{ etc.}$, ou $BC : DE :: BF : DI :: FG : IK :: GH : KL$, etc.

THÉORÈME XVI.

Réciproquement, toute droite FG , qui divise proportionnellement la base BC d'un triangle et la parallèle DE à cette base, passe par le sommet.



On a, par hypothèse, $BF : DG :: CF : EG$ ou, autrement, $BC : DE :: BF : DG$; cela étant, si la droite FG ne passait pas par le point A , et que GK fût le prolongement de AG , on aurait $BC : DE :: BK : DG$ (15. cor.). Cette proportion et la précédente ayant trois termes égaux chacun à chacun, il faudrait qu'on eût $BK = BF$, ce qui est absurde; donc la droite FG passe par le point A .

THÉORÈME XVII.

Lorsque, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC , on abaisse une perpendiculaire AD sur l'hypoténuse : 1° *chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent à ce côté; 2° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.*



1° Les triangles ABC , ABD ont l'angle B commun, et l'angle droit $BAC = ADB$; donc le troisième angle C du premier est égal au troisième angle BAD du second; donc $BC : AB :: AB : BD$ (4). En comparant les deux triangles ABC , ACD , on aura, de même, $BC : AC :: AC : CD$.

2° En vertu de ce qui précède, les triangles ABD , ACD ont les angles égaux chacun à chacun; donc leurs côtés homologues donnent la proportion $BD : AD :: AD : CD$.

RÉCIPROQUEMENT, la droite AD étant perpendiculaire à BC , lorsqu'on a $BC : AB :: AB : BD$, ou $BD : AD :: AD : CD$, l'angle BAC est droit. Car 1° les triangles ABC , ABD ayant l'angle commun B compris entre côtés proportionnels, l'angle BAC , opposé au côté BC du premier, est égal à l'angle droit ADB , opposé au côté AB du second (6). 2° Les triangles ABD , ACD ayant les angles ADB , ADC égaux et compris entre côtés proportionnels, l'angle $BAD = C$, et l'angle $CAD = B$; donc $(BAD + CAD)$ ou $BAC = B + C$; or la somme des trois angles du triangle ABC est égale à deux droits; donc la demi-somme BAC est un angle droit.

THÉORÈME XVIII.

Lorsque, d'un point A de la circonférence, on abaisse une perpendiculaire AD sur un diamètre BC et qu'on mène des cordes AB , AC aux extrémités de ce même diamètre : 1° chaque corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment adjacent à cette corde ; 2° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre.



En effet, l'angle BAC , inscrit dans un demi-cercle, est un angle droit; donc 1° chacun des côtés AB , AC du triangle rectangle ABC est moyen proportionnel entre l'hypoténuse BC et le segment adja-

cent à ce côté ; 2° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments BD , CD de l'hypoténuse (17).

RÉCIPROQUEMENT, lorsque, la droite AD étant perpendiculaire à BC , on a $BC:AB::AB:BD$, ou $BD:AD::AD:CD$, le point A est situé sur la circonférence décrite sur BC comme diamètre. Car, dans l'un et dans l'autre cas, l'angle BAC est droit (17, réc.) ; donc la circonférence, décrite sur l'hypoténuse BC comme diamètre, passe par le point A .

THÉORÈME XIX.

Les parties de deux cordes AB , CD , qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles.



Menons AD et BC . Les angles A et C sont égaux, comme inscrits dans un même segment ; l'angle $D = B$, par la même raison ; donc les triangles AOD , BOC ont les angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues donnent la proportion $AO:CO::DO::BO$ (4).

RÉCIPROQUEMENT, lorsque deux droites finies AB , CD se coupent en un point O , de manière qu'on ait $AO:CO::DO:BO$, leurs extrémités A , B , C , D sont situées sur une même circonférence. En effet, les triangles AOD , BOC ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, l'angle $C = A$ (6) et, par suite, le point C appartient à la circonférence qui passe par les trois points A , D , B , (liv. III, 17).

THÉORÈME XX.

Lorsque, d'un point O , pris hors d'un cercle, on mène des sécantes OA , OB , qui se terminent à la cir-

conférence, les sécantes entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures.



Menons AB et CD. Dans le quadrilatère inscrit ABDC, l'angle A a pour supplément BDC (liv. III, 18) ; mais l'angle ODC a aussi pour supplément BDC ; donc $A = ODC$; l'angle $B = OCD$, par la même raison ; donc les triangles OAB, OCD ont les angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues donnent la proportion $OA : OD :: OB : OC$, ou $OA : OB :: OD : OC$.

RÉCIPROQUEMENT, lorsque deux droites finies OA, OB, qui se rencontrent, sont divisées aux points C et D de manière qu'on ait la proportion $OA : OB :: OD : OC$, les quatre points A, B, D, C sont situés sur une même circonférence. Car, la proportion précédente donne $OA : OD :: OB : OC$; donc les triangles OAB, OCD ont l'angle commun O compris entre côtés proportionnels ; donc l'angle $A = ODC$ (6) ; mais on a $ODC + BDC =$ deux droits ; donc on aura, pareillement, $A + BDC =$ deux droits ; donc le quadrilatère ABDC est inscriptible (liv. III, 18).

THÉORÈME XXI.

Lorsque, d'un point O, pris hors d'un cercle, on mène une tangente OA, et une sécante OB, qui se terminent à la circonférence, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.



Menons AB et AC. Les triangles AOB, AOC ont l'angle O commun ; de plus, l'angle inscrit ABO est la moitié de l'angle au centre, correspondant à l'arc AC (liv. III, 15) ; l'angle CAO, formé par une corde et une tangente, est la moitié du même angle au centre

(liv. III, 16); donc $\angle ABO = \angle CAO$; donc ces deux triangles ont les angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues donnent la proportion $OB : OA :: OA : OC$.

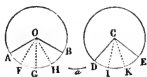


RÉCIPROQUEMENT, lorsque deux droites finies OA , OB se rencontrent, et que l'une d'elles est divisée en un point C , de manière qu'on ait $OB : OA :: OA : OC$, la droite OA est tangente à la circonférence menée par les trois points A , B , C . Car, si cette circonfé-

rence rencontrait la droite OA en un second point K , on aurait $OB : OA :: OK : OC$ (20) et, par suite, $OK = OA$, ce qui est absurde.

THÉORÈME XXII.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux angles au centre AOB , DCE sont entre eux comme les arcs correspondants.



Supposons d'abord que les arcs AB , DE soient commensurables, et qu'un même arc a soit contenu, par exemple, quatre fois dans AB et trois fois dans DE ; ou, autrement, qu'on ait la proportion $AB : DE :: 4 : 3$. Si l'on divise l'arc AB en quatre parties égales, et l'arc DE en trois parties, aussi égales entre elles, tous ces arcs partiels seront égaux à l'arc a . Cela posé, menons, dans chacun des cercles, des rayons à tous les points de division. Puisqu'à des arcs égaux correspondent des angles au centre égaux entre eux (liv. III, 6), l'angle DCE est divisé en trois angles égaux à DCI , et l'angle AOB contient quatre fois ce même angle DCI ; donc on a la proportion $AOB : DCE :: 4 : 3$ ou $:: AB : DE$.

Supposons, en second lieu, que les arcs AB, DE soient incommensurables.

Divisons l'arc DE, par exemple, en neuf parties DF, FG,



GH, etc., égales entre elles; portons DF sur AB, autant de fois que cela est possible, et supposons que l'arc AB contienne cinq fois DF avec un

reste $BK < DF$: si, dans chacun des cercles, on mène des rayons à tous les points de division, puisqu'à des arcs égaux correspondent des angles au centre, égaux entre eux (liv. III, 6), et qu'à un plus petit arc correspond un plus petit angle (liv. III, 7), l'angle DCE sera divisé en neuf angles égaux à DCF, et l'angle AOB contiendra cinq fois ce même angle DCF avec un reste $BOK < DCF$: donc l'angle AOB contient la neuvième partie de l'angle DCE autant de fois que l'arc AB contient la neuvième partie de l'arc DE; or le nombre des divisions de l'arc DE est arbitraire, donc AOB contient une partie aliquote de DCE, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que l'arc AB contient la même partie aliquote de DE; donc on a la proportion $AOB : DCE :: AB : DE$ (déf. 1).

REMARQUE. On prouverait de la même manière que: *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux secteurs sont entre eux comme leurs bases.*

THÉORÈME XXIII.

Tout angle au centre a pour mesure l'arc correspondant.

Soient A et B deux angles au centre d'un même cercle ou de cercles égaux, a et b les arcs correspondants à ces angles.

En vertu du théorème précédent, on a la proportion $A : B$

$:: a : b$. Cela étant, si l'on prend B pour unité d'angle et b pour unité d'arc, le rapport A : B sera la mesure de l'angle A, et le rapport $a : b$ celle de l'arc a ; donc la mesure d'un angle au centre est égale à celle de l'arc correspondant, en supposant qu'on prenne pour unité d'arc celui qui correspond à l'unité d'angle; c'est ainsi qu'on doit entendre l'énoncé du théorème qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. On prouverait de même qu'un secteur a pour mesure l'arc qui lui sert de base, en supposant qu'on prenne pour unité d'arc la base du secteur pris pour unité de surface.

COROLLAIRE 1. L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Car il est la moitié de l'angle au centre correspondant à cet arc (liv. III, 15).

COROLLAIRE 2. L'angle formé par une tangente et une corde a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Car il est la moitié de l'angle au centre correspondant à cet arc (liv. III, 16).

THÉORÈME XXIV.

L'angle BAD, formé par une corde AB et le prolongement AD d'une autre corde AC, a pour mesure la demi-somme des arcs AMB, ANC compris entre ses côtés et leurs prolongements.

Menons BC. L'angle BAD, extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs C et B; or l'angle inscrit C a pour mesure $\frac{1}{2}$ AMB (23, cor. 1); de même, l'angle B a pour mesure $\frac{1}{2}$ ANC; donc BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ AMB + $\frac{1}{2}$ ANC, ou

$$\frac{AMB + ANC}{2}.$$


THÉORÈME XXV.

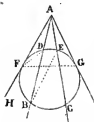
L'angle BAC, formé par deux droites menées d'un point A, pris dans l'intérieur du cercle, à la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs BC, DE compris entre ses côtés et leurs prolongements.



Menons BE. L'angle BAC, extérieur au triangle ABE, est égal à la somme des angles E et B; mais l'angle inscrit E a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC; de même, l'angle B a pour mesure $\frac{1}{2}$ DE; donc BAC a pour mesure $\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} DE$, ou $\frac{BC + DE}{2}$.

THÉORÈME XXVI.

L'angle formé par deux droites menées d'un point A pris hors du cercle, à la circonférence, a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.



Trois cas peuvent se présenter, selon que les deux droites sont toutes deux sécantes, l'une sécante et l'autre tangente, ou toutes deux tangentes. 1° L'angle proposé BAC a pour mesure $\frac{BC - DE}{2}$.

Menons BE. L'angle BEC, extérieur au triangle ABE, est égal à la somme des angles A et E; donc $A = BEC - E$; mais l'angle inscrit BEC a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC; de même, l'angle E a pour mesure $\frac{1}{2}$ DE; donc BAC a pour mesure $\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} DE$, ou $\frac{BC - DE}{2}$.

2° L'angle BAF a pour mesure $\frac{BF - DF}{2}$.

Car, si l'on mène DF, on prouvera, comme précédemment, que l'angle BAF = BDF - AFD; or l'angle inscrit BDF a pour mesure $\frac{1}{2}$ BF; l'angle AFD, formé par une tangente et une corde, a pour mesure $\frac{1}{2}$ DF (23. cor. 2); donc BAF a pour mesure $\frac{1}{2}$ BF - $\frac{1}{2}$ DF, ou $\frac{BF - DF}{2}$.

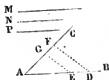
3° L'angle GAH a pour mesure $\frac{GBF - GDF}{2}$.

Car, si l'on mène FG, on aura, comme précédemment, GAH = GFH - AGF; or l'angle GFH, formé par une tangente et une corde, a pour mesure $\frac{1}{2}$ GBF; de même, AGF a pour mesure $\frac{1}{2}$ GDF; donc GAH a pour mesure $\frac{1}{2}$ GBF - $\frac{1}{2}$ GDF, ou $\frac{GBF - GDF}{2}$.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE IV.

PROBLÈME PREMIER.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données M, N, P.



Traçons les deux droites indéfinies AB, AC; prenons, sur AB, AD = M, AE = N, et, sur AC, AF = P; joignons le point D au point F, et menons EG parallèle à DF : la droite AG sera la quatrième proportionnelle demandée.

Car, puisque la droite EG est parallèle à DF, on a la proportion AD : AE :: AF : AG (th. 1); or, par construction, AD = M, AE = N, AF = P, donc M : N :: P : AG.

REMARQUE. La même construction sert à trouver une troisième proportionnelle à deux droites données.

PROBLÈME II.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données M et N.



Sur la droite indéfinie AB, prenons $AC = M$, $CD = N$; sur la ligne totale AD, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; élevons CE perpendiculaire sur AD jusqu'à la rencontre de la circonférence au point E: la droite EC est la moyenne proportionnelle demandée.

Car, EC étant une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre, on a $AC:EC::EC:CD$ (th. 18); or $AC = M$ et $CD = N$; donc $M:EC::EC:N$.

PROBLÈME III.

Diviser une droite donnée AB en parties proportionnelles à des droites données M, N, P.



Traçons la droite indéfinie AK; prenons $AC = M$, $CD = N$, $DE = P$; joignons le point E au point B, et menons CF, DG parallèles à EB. La droite AB sera divisée aux points F et G en parties proportionnelles aux droites M, N, P.

Car les droites CF, DG étant parallèles à la base EB du triangle ABE, on a la suite de rapports égaux $AF:AC::FG:CD::GB:DE$ (th. 1, cor. 2); or $AC = M$, $CD = N$, $DE = P$; donc $AF:M::FG:N::GB:P$.

PROBLÈME IV.

Diviser une droite donnée AB en moyenne et extrême parties.



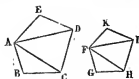
A l'extrémité B de la droite AB, élevons la perpendiculaire BC (liv. III, prob. 6) égale à la moitié de AB; du point C, comme centre, avec un rayon égal à CB, décrivons une circonférence; menons AC qui coupera la circonférence en D, et prenons AE = AD: la droite AB sera divisée au point E de la manière demandée, c'est-à-dire qu'on aura $AB : AE :: AE : BE$. (déf. 3).

Car, la droite AB, perpendiculaire à l'extrémité B du rayon CB, est une tangente menée du point A (liv. III, 3); et, si l'on prolonge AC jusqu'à la rencontre de la circonférence en un second point F, la droite AF sera une sécante menée du même point A, et AD sa partie extérieure; donc $AF : AB :: AB : AD$ (th. 21), d'où l'on déduit $AB : (AF - AB) :: AD : (AB - AD)$. Mais, puisque le rayon $CB = \frac{1}{2} AB$, le diamètre $DF = AB$; donc $AF - AB = AF - DF = AD = AE$; d'ailleurs $AB - AD = AB - AE = BE$; donc la proportion précédente donne $AB : AE :: AE : BE$.

REMARQUE. Si, dans la proportion $AF : AB :: AB : AD$, on remplace AB par DF, on aura $AF : DF :: DF : AD$; donc la droite AF est divisée au point D en moyenne et extrême parties.

PROBLÈME V.

Sur une droite donnée GH, comme côté homologue à un côté BC d'un polygone donné ABCDE, décrire un polygone semblable au premier.



D'un même sommet A, menons les diagonales AC, AD aux autres sommets : au point G, faisons l'angle $FGH = ABC$ (liv. III, prob. 14); puis, au point H, l'angle $FHG = ACB$: les deux droites GF, HF se rencontreront en un point F (liv. I, 16), et le triangle FGH sera semblable à ABC (th. 4). Construisons, de même, sur FH, le triangle FHI semblable à ACD, et, sur FI, le triangle FIK semblable à ADE. Le polygone FGHIK sera semblable au polygone proposé ABCDE.

Car, par construction, les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent le premier polygone, sont respectivement semblables aux triangles FGH, FHI, FIK qui composent le second (th. 10).

PROBLÈME VI.

Construire un polygone semblable à un polygone donné P, et dont le périmètre soit à celui de ce polygone dans le rapport donné $m : n$.

Soit a un côté de la figure donnée, et x le côté homologue, dans la figure demandée.

Puisque les périmètres des polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues (th. 13), il faudra qu'on ait la proportion $x : a :: m : n$. On trouvera donc le côté x , en construisant une quatrième proportionnelle aux trois droites données n, m, a (1) : connaissant x , la construction s'achèvera en décrivant sur x , comme côté homologue à a , un polygone semblable à P (5).

PROBLÈME VII.

Construire un polygone semblable à un polygone

donné P, et dont le périmètre soit équivalent à celui d'un autre polygône aussi donné.

Soient A et B les périmètres des deux polygones proposés, a un côté du premier, y le périmètre du polygône demandé, et x le côté homologue à a .

On aura $A : y :: a : x$; or $y = B$, donc $A : B :: a : x$; remplaçant les périmètres A et B par des droites m et n qui leur soient équivalentes (liv. III, prob. 2), on a $m : n :: a : x$. On trouvera donc le côté x en construisant une quatrième proportionnelle aux trois droites connues m , n , a (1); ensuite on décrira sur x , homologue à a , un polygône semblable à P (5).

PROBLÈME VIII.

Deux polygones semblables P et Q étant donnés, construire un polygône semblable à ceux-ci, et dont le périmètre C soit égal à la somme ou à la différence de leurs périmètres A et B.

Soient a et b deux côtés homologues dans les polygones P et Q.

1° Traçons une droite c égale à la somme des côtés a et b (liv. III, prob. 2); puis, sur c , comme côté homologue au côté a , décrivons un polygône R semblable à P (5); on aura $C = A + B$.

En effet, P et Q étant semblables, on a la proportion $A : B :: a : b$ (th. 13), d'où l'on déduit $(A + B) : A :: (a + b) : a$; or $a + b = c$, par construction, donc $(A + B) : A :: c : a$; mais, R étant semblable à P, on a aussi la proportion $C : A :: c : a$; donc $C = A + B$.

2° Traçons une droite c égale à la différence des côtés a et b (liv. III, prob. 2); puis, sur c , comme côté homologue à a , décrivons un polygône semblable à P; on aura $C = A - B$.

La démonstration est analogue à celle qui précède.

LIVRE V.

LA MESURE DES POLYGONES.

DÉFINITIONS.

1. La *longueur* d'une ligne est le rapport de son *étendue* à celle de l'unité linéaire.

Ainsi, en supposant qu'on prenne le mètre pour unité, lorsqu'une ligne, de forme quelconque, contient cinq fois la septième partie d'un mètre, la longueur de cette ligne est égale au nombre $\frac{5}{7}$.

2. L'*aire* d'une surface est le rapport de son *étendue* à celle de l'unité de superficie.

Ainsi, en supposant qu'on prenne pour unité de surface le carré dont le côté est un mètre, lorsqu'une surface, de forme quelconque, contient quinze fois la dixième partie d'un mètre carré, l'aire de cette surface est égale au nombre 1,5.

3. Le *produit* ou *rectangle* de deux lignes est le produit de leurs longueurs.

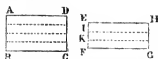
Ainsi, en supposant toujours qu'on prenne le mètre pour unité linéaire, lorsque deux lignes contiennent l'une 5 mètres et l'autre 12 mètres, le produit de ces lignes est le nombre abstrait 5×12 ou 60.

4. Les deux *dimensions* d'un rectangle sont sa base et sa hauteur.

5. La *projection* d'une droite sur une autre est la partie de celle-ci, comprise entre les perpendiculaires abaissées des extrémités de la première sur la seconde.

THÉORÈME PREMIER.

Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.



Soient les rectangles $ABCD$, $EFGH$, qui ont la base $BC = FG$: on aura la proportion $ABCD : EFGH :: AB : EF$.

Supposons d'abord que les hauteurs AB , EF soient commensurables, et qu'on ait, par exemple, $AB : EF :: 4 : 3$. Divisons EF en trois parties EI , IK , KF égales entre elles, et portons EI sur AB autant de fois que cela est possible : en vertu de la supposition, EI sera contenue exactement quatre fois dans AB . Cela posé, si, dans chacun des rectangles, on mène, par tous les points de division, des parallèles aux bases, on décomposera le rectangle $EFGH$ en trois rectangles qui seront égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur (liv. II, 15) : le rectangle $ABCD$ contiendra quatre de ces rectangles partiels ; donc on aura la proportion $ABCD : EFGH :: 4 : 3$ ou $:: AB : EF$.



En second lieu, si les hauteurs AB , EF sont incommensurables, on aura encore la proportion $ABCD : EFGH :: AB : EF$.

Observons d'abord que, si l'on a $EF < AB$, on aura $EFGH < ABCD$.

En effet, si l'on prend $B1 = EF$ et qu'on mène $1K$ parallèle à BC , on aura $1BCK = EFGH$ (liv. II, 15) ; or $1BCK < ABCD$, donc $EFGH < ABCD$.

Cela étant, divisons EF , par exemple, en cinq parties EL , LM , etc., égales entre elles, et portons EL sur AB autant de fois qu'elle peut y être contenue, six fois, par exemple,

avec un reste $AN < EL$; si, par tous les points de division, on mène des parallèles aux bases, le rectangle $EFGH$ sera divisé en cinq rectangles égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur; le rectangle $ABCD$ contiendra six de ces rectangles partiels avec un reste $ANOD < ELPH$, puisque l'on a $AN < EL$: donc le rectangle $ABCD$ contient la cinquième partie du rectangle $EFGH$ autant de fois que la hauteur AB contient la cinquième partie de la hauteur EF ; or le nombre cinq des divisions de la hauteur EF a été pris arbitrairement; donc le rectangle $ABCD$ contient une partie aliquote de $EFGH$, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que la hauteur AB contient la même partie aliquote de EF ; donc $ABCD : EFGH :: AB : EF$.

THÉORÈME II.

Deux rectangles quelconques R et R' sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

Soient B et B' les bases des rectangles proposés, H et H' leurs hauteurs.

Concevons un troisième rectangle R'' qui ait B pour base, et H' pour hauteur. Les rectangles R et R'' , ayant même base B , sont entre eux comme leurs hauteurs, et on a $R : R'' :: H : H'$; pareillement, les rectangles R'' et R' , ayant même hauteur H' , sont entre eux comme leurs bases, et on a $R'' : R' :: B : B'$. Faisant le produit de ces deux proportions et supprimant le facteur R'' commun aux deux premiers termes de la proportion résultante, il vient $R : R' :: B \times H : B' \times H'$.

REMARQUE. Dans les trois proportions $R : R'' :: H : H'$, $R'' : R' :: B : B'$, $R : R' :: B \times H : B' \times H'$, on peut supposer indifféremment que R , R' , R'' sont des surfaces ou des nombres qui expriment les rapports de ces surfaces à celle qu'on a prise pour unité; mais lorsqu'on multiplie entre elles les deux premières pour en déduire la troisième, on admet tacite-

tement que R , R' , R'' sont des nombres qui mesurent les rectangles que l'on considère ; sans quoi , les produits $R \times R''$, $R'' \times R'$ n'auraient aucune signification.

THÉORÈME III.

L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Soient R et R' deux rectangles quelconques, B et B' leurs bases, H et H' leurs hauteurs.

On a, par le théorème précédent, $R : R' :: B \times H : B' \times H'$. Cela étant, si l'on suppose que R' soit le carré dont le côté est égal à l'unité linéaire, et qu'on prenne ce carré pour unité de surface, chacun des nombres B' , H' sera égal à l'unité, et la proportion précédente deviendra $R : R' :: B \times H : 1 \times 1$, d'où l'on déduit $(R : R') = B \times H$. Donc l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité de superficie le carré dont le côté est égal à l'unité linéaire.

REMARQUE. Supposons, par exemple, qu'un rectangle ait un mètre deux décimètres de base et trois mètres quatre décimètres de hauteur. Si l'on prend le mètre carré pour unité de surface, l'aire du rectangle proposé sera 1, 2 $\times$ 3, 4 ou 4,08 ; c'est-à-dire qu'il contiendra 4 mètres carrés, plus 8 centièmes de mètre carré ou, ce qui revient au même, 4 mètres carrés plus 8 décimètres carrés. Car, si l'on conçoit la base d'un mètre carré divisée en dix parties égales, et qu'on mène, par chaque point de division, une parallèle à la hauteur, on décomposera ainsi la figure en 10 rectangles d'un décimètre de base et d'un mètre de hauteur ; ensuite, si on divise la hauteur en dix parties égales, et qu'on mène, par tous les points de division, des parallèles à la base, on décomposera chacun des dix rectangles par-

tiels en dix autres rectangles ayant un décimètre de base et un décimètre de hauteur. Donc le mètre carré sera ainsi divisé en 10×10 ou 100 décimètres carrés; ce qui montre qu'un décimètre carré est la centième partie d'un mètre carré. On verrait de même qu'un centimètre carré est la dix-millième partie d'un mètre carré, et qu'un millimètre carré en est la millionième partie; de sorte qu'en prenant le mètre carré pour unité, un rectangle, dont l'aire serait 1,423567, contiendrait 1 mètre carré, plus 42 décimètres carrés, plus 35 centimètres carrés, plus 67 millimètres carrés.

THÉORÈME IV.

Tout triangle rectangle ABC a pour mesure la moitié du produit $AB \times BC$ des deux côtés de l'angle droit.



Achevons le rectangle ABCD. Les triangles ABC, ACD sont égaux (liv. II, 17, rem.); donc chacun d'eux est la moitié du rectangle ABCD; mais ce rectangle a pour mesure le produit $AB \times BC$ de sa base par sa hauteur (3), donc le triangle ABC a pour mesure $\frac{1}{2} AB \times BC$.

THÉORÈME V.

L'aire d'un triangle quelconque ABC est égale à la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AD.



Deux cas peuvent se présenter, selon que la hauteur AD tombe dans l'intérieur du triangle ou en dehors.

1° Le triangle ABC est la somme des deux triangles ABD, ACD; mais le triangle rectangle ABD a pour mesure $\frac{1}{2} BD \times AD$ (4); pareillement,

le triangle ACD a pour mesure $\frac{1}{2} CD \times AD$; donc le triangle total ABC a pour mesure $\frac{1}{2} (BD + CD) \times AD$ ou $\frac{1}{2} BC \times AD$.

2° Le triangle ABC , étant la différence des deux triangles ABD , ACD , a pour mesure $\frac{1}{2} BD \times AD - \frac{1}{2} CD \times AD$, ou $\frac{1}{2} (BD - CD) \times AD$, ou enfin $\frac{1}{2} BC \times AD$.

COROLLAIRE 1. *Tous les triangles de même base et de même hauteur sont équivalents.* Car ils ont pour mesure commune la moitié du produit de leur base par leur hauteur.

COROLLAIRE 2. *Deux triangles quelconques T et T' sont entre eux comme les produits $B \times H$, $B' \times H'$ de leurs bases par leurs hauteurs.* Car on a $T = \frac{1}{2} B \times H$, $T' = \frac{1}{2} B' \times H'$ et, par suite, $T : T' :: B \times H : B' \times H'$.

COROLLAIRE 3. *Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.* Car, si, dans la proportion $T : T' :: B \times H : B' \times H'$, on suppose, par exemple, $B = B'$, on aura $T : T' :: H : H'$.

THÉORÈME VI.

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est égale au produit $BC \times AE$ de sa base par sa hauteur.



Menons la diagonale AC . Les triangles ABC , ACD sont égaux (liv. II, 17, rem.) ; donc le parallélogramme $ABCD$ est double du triangle ABC ; or ce triangle a pour mesure $\frac{1}{2} BC \times AE$ (5) ; donc le parallélogramme a pour mesure $BC \times AE$.

COROLLAIRE 1. *Deux parallélogrammes, de même base et de même hauteur, sont équivalents.*

REMARQUE. On peut aussi le démontrer en superposant les deux figures de manière que leurs bases coïncident : alors les côtés opposés à ces bases sont situés dans une même direction et, si, de la figure totale qui en résulte, on retranche

successivement deux triangles égaux entre eux, comme ayant un angle égal (liv. I, 18) compris entre côtés égaux chacun à chacun (liv. II, 17), on obtient des restes équivalents, qui sont les deux parallélogrammes proposés.

COROLLAIRE 2. Deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

COROLLAIRE 3. Deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

COROLLAIRE 4. Tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (5).

THÉORÈME VII.

L'aire d'un trapèze ABCD est égale à sa hauteur AE multipliée par la demi-somme de ses bases, ou à sa hauteur multipliée par la droite MN qui joint les milieux des côtés.



Menons la diagonale AC, qui décompose le trapèze en deux triangles ABC, ACD. Le premier a pour mesure la moitié du produit $BC \times AE$ de sa base par sa hauteur (5), et le second, la moitié du produit de sa base AD par sa hauteur CF, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{2} AD \times AE$, puisque $CF = AE$ (liv. II, 28); donc le trapèze a pour mesure $\frac{1}{2} BC \times AE + \frac{1}{2} AD \times AE$, ou $AE \times \frac{BC + AD}{2}$, ou enfin $AE \times MN$ (liv. II, 23).

REMARQUE. En général, pour mesurer un polygone de tant de côtés qu'on voudra, on le décompose en triangles en menant, par exemple, d'un même sommet, des diagonales aux autres sommets; on calcule séparément l'aire de

chacun des triangles ainsi formés, et la somme de toutes ces aires partielles est égale à celle du polygone proposé.

THÉORÈME VIII.

L'aire d'un polygone circonscrit à un cercle est égale à la moitié du produit de son périmètre par le rayon.



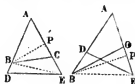
Soit le polygone ABC qui touche le cercle aux points M, N, P.

Menons OA, OB, OC. Le rayon OM, mené au point de contact, étant perpendiculaire à la tangente AB, le triangle AOB a pour mesure $\frac{1}{2} AB \times OM$ (5); pareillement, le triangle BOC a pour mesure $\frac{1}{2} BC \times ON$, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des côtés du polygone; or $OM = ON = OP$; donc le polygone ABC a pour mesure $\frac{1}{2} AB \times OM + \frac{1}{2} BC \times OM + \text{etc.}$, ou $\frac{AB + BC + AC}{2} \times OM$.

COROLLAIRE. Deux polygones, circonscrits à un même cercle ou à des cercles égaux, sont entre eux comme leurs périmètres.

THÉORÈME IX.

Deux triangles ABC, ADE, qui ont un angle égal, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal.



Menons BE. Les triangles ABC, ABE peuvent être considérés comme ayant pour sommet commun le point B; alors ils ont leurs bases AC, AE situées dans la même direction

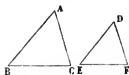
et, pour hauteur commune, la perpendiculaire BP abaissée du point B sur AE; donc ils sont entre eux comme leurs bases (5, cor. 3), et on a la proportion $ABC:ABE::AC:AE$; pareillement, les triangles ABE, ADE, considérés comme ayant même sommet E, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases; donc on a $ABE:ADE::AB:AD$; faisant le produit de ces deux proportions, et supprimant le facteur ABE commun aux deux premiers termes de la proportion résultante, il vient $ABC:ADE::AB \times AC:AD \times AE$.

REMARQUE. La proportion $ABC:ABE::AC:AE$ montre que: *deux triangles, qui ont un côté égal et un angle égal adjacent à ce côté, sont entre eux comme les autres côtés adjacents à l'angle égal.*

COROLLAIRE. *Deux parallélogrammes, qui ont un angle égal, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal.* Car chacun de ces parallélogrammes est double d'un triangle dont deux côtés sont égaux à ceux qui comprennent l'angle égal (liv. II, 17, rem.)

THÉORÈME X.

Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.



Soient les triangles semblables ABC, DEF, qui ont l'angle $A = D$ et dans lesquels on a $AB:DE::AC:DF$ (liv. IV, 6).

L'angle A étant égal à l'angle D, on a $ABC:DEF::AB \times AC:DE \times DF$ (9); mais la proportion $AB:DE::AC:DF$ donne $AB \times AC:DE \times DF::AB^2:DE^2$; donc, à cause du rapport commun $AB \times AC:DE \times DF$, on a $ABC:DEF::AB^2:DE^2$.

THÉORÈME XI.

Deux polygones semblables P et P' sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.

On sait que deux polygones semblables sont décomposables en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun (liv. IV, 11). Soient A, B, C, etc., les triangles qui composent le polygone P; A', B', C', etc., les triangles, respectivement semblables à A, B, C, etc., qui composent le polygone P'; a et a' deux côtés homologues, dans les deux polygones.

On a, par le théorème précédent, $A : A' :: a^2 : a'^2$, $B : B' :: a^2 : a'^2$, $C : C' :: a^2 : a'^2$, etc., d'où l'on déduit $A : A' :: B : B' :: C : C'$, etc. Dans cette suite de rapports égaux, la somme des antécédents $A + B + C + \text{etc.}$, ou le polygone P, est à la somme des conséquents $A' + B' + C' + \text{etc.}$, ou au polygone P', comme un antécédent A est à son conséquent A', ou comme $a^2 : a'^2$.

THÉORÈME XII.

Le carré fait sur la somme AC de deux droites AB, BC contient le carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, plus deux fois le rectangle compris sous les deux droites.



Construisons les carrés ACDE, ABFG; prolongeons BF jusqu'à la rencontre de DE en H, et GF jusqu'à la rencontre de CD en I.

Le carré ACDE se compose de quatre rectangles. Le premier ABFG est le carré fait sur AB; le second DIFH est le carré fait

sur BC ; car, $DC = DE$, par construction ; les côtés IC, BF sont égaux, comme opposés dans un rectangle ; $EH = GF$, par la même raison ; or $GF = BF$, donc $IC = EH$, et, par suite, $DC - IC = DE - EH$, ou $DI = DH = BC$. Enfin les deux autres rectangles EGFH, ICBF ont la base $FG = FB = AB$ et la hauteur $FH = IF = BC$. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

REMARQUE. On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante. Soient a et b les longueurs des deux droites AB, BC (déf. 1) ; celle de AC est $a + b$; donc le carré ACDE a pour mesure $(a + b)^2$ (3), ou $a^2 + b^2 + 2ab$, c'est-à-dire l'aire du carré fait sur AB, plus l'aire du carré fait sur BC, plus deux fois l'aire du rectangle compris sous AB et BC.

THÉORÈME XIII.

Le carré fait sur la différence AC de deux droites AB, BC contient le carré fait sur la première, plus le carré fait sur la seconde, moins deux fois le rectangle compris sous les deux droites.



Construisons les carrés ABDE, ACFG, EGH I ; prolongeons CF jusqu'à la rencontre de DE en K, et GF jusqu'à la rencontre de BD en L.

La figure entière se compose de deux rectangles ABDE, EGH I dont l'un est le carré de AB et l'autre le carré de EG ou de BC. Si l'on en retranche les deux rectangles ICFH, DBCK, on aura pour reste le carré de AC ; donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - ICFH - DBCK$; or ces deux rectangles ont la base $IK = DE = AB$, et la hauteur $FK = DK = BC$, donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$.

REMARQUE. On peut encore démontrer ce théorème de la

manière suivante. Soient a et b les longueurs des droites AB, BC; celle de AC est $a - b$; donc le carré fait sur AC a pour mesure $(a-b)^2$ (3), ou $a^2 + b^2 - 2ab$, c'est-à-dire l'aire du carré fait sur AB, plus l'aire du carré fait sur BC, moins deux fois l'aire du rectangle compris sous AB et BC.

THÉORÈME XIV.

Le rectangle compris sous la somme AC et la différence de deux droites AB, BC est égal à la différence des carrés de ces droites.



Prenons $BD = BC$. Construisons le carré AB EF et le rectangle ACGH qui a pour base AC et pour hauteur $CG = AD$; puis élevons sur AC la perpendiculaire DK, qui rencontre GH au point I et EF au point K.

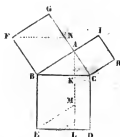
La figure entière se compose du carré AB EF et du rectangle BCG L: si l'on en retranche le rectangle FHIK et le carré ELIK, qui a pour côté $EK = BD = BC$, on aura pour reste le rectangle ACGH; donc $ACGH = \overline{AB}^2 + BCG L - FHIK - \overline{BC}^2$; or les deux rectangles BCG L, FHIK ont la base $CG = IH = AD$ et la hauteur $BC = BD = IK$; donc ils sont égaux; donc $ACGH = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

REMARQUE. On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante. Soient a et b les longueurs des deux droites AB, BC; $a + b$ est la longueur de AC et $a - b$ celle de AD; donc le rectangle ACGH a pour mesure $(a+b) \times (a-b)$, ou $a^2 - b^2$, c'est-à-dire l'aire du carré de AB moins celle du carré de BC.

THÉORÈME XV.

Le carré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectan-

gle ABC est égal à la somme des carrés faits sur les côtés de l'angle droit.



Construisons les carrés BCDE, ABFG, ACHI; menons AK perpendiculaire à BC; prolongeons AK jusqu'à la rencontre de DE en L, et achevons les parallélogrammes ABEM, CBFN.

Les angles ABE, CBF sont égaux comme ayant le même excès ABC sur un angle droit; de plus, $AB = BF$ et $BE = BC$ par hypothèse; donc les parallélogrammes ABEM, CBFN ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (liv. II, 15). Mais le rectangle BELK est équivalent au parallélogramme ABEM, qui a la même base BE et la même hauteur BK (6, cor. 1); pareillement, le carré ABFG est équivalent au parallélogramme CBFN, qui a la même base BF et la même hauteur AB; donc le rectangle BELK est équivalent au carré ABFG; on prouverait de même que le rectangle CKLD est équivalent au carré ACHI; donc le carré BCDE est égal à la somme des carrés ABFG, ACHI.

COROLLAIRE 1. On en déduit $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, et $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$; donc le carré de l'un des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse moins le carré de l'autre côté.

COROLLAIRE 2. Le triangle rectangle isocèle ABC donne $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; d'où l'on déduit $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, et $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; donc le rapport de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle au côté de l'angle droit, ou, autrement, le rapport de la diagonale au côté d'un carré est égal à la racine carrée de 2.



REMARQUE 1. Le carré BCDE et le rectangle BELK, ayant même hauteur BE, sont entre eux comme leurs bases BC, BK (1); or le rectangle est équivalent au carré fait sur AB, donc *le carré fait sur l'hypoténuse est au carré fait sur l'un des côtés de l'angle droit comme l'hypoténuse est au segment adjacent à ce côté.*

REMARQUE 2. Les rectangles BELK, CDLK, ayant même hauteur KL, sont entre eux comme leurs bases BK, CK; or ces rectangles sont équivalents aux carrés des côtés AB, AC, donc *les carrés faits sur les côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments de l'hypoténuse adjacents à ces côtés.*

THÉORÈME XVI.

Réciproquement, lorsque l'un des carrés faits sur les trois côtés d'un triangle ABC est égal à la somme des deux autres, l'angle opposé au premier côté est un angle droit.



Soit $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$. Élevons, sur AC, la perpendiculaire $CD = BC$, et menons AD.

Le triangle ACD étant rectangle en C, on a, par le théorème précédent, $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$; mais, par hypothèse, on a aussi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$; donc $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$ et, par suite, $AB = AD$; donc les triangles ABC, ACD ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle ACB, opposé au côté AB, est égal à l'angle droit ACD, opposé au côté AD.

THÉORÈME XVII.

Dans tout triangle obtusangle ABC, le carré fait

sur le côté AB, opposé à l'angle obtus ACB, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le rectangle compris sous l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur le premier.

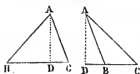


Soit AD la perpendiculaire abaissée du point A sur la direction du côté BC: on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$.

En effet, dans le triangle rectangle ABD, on a $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ (15); or le triangle rectangle ACD donne $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$ et, BD étant la somme des deux droites BC, CD, on a $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$ (12); donc $(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$ ou $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$.

THÉORÈME XVIII.

Dans tout triangle ABC, le carré fait sur le côté AB, opposé à un angle aigu ACB, est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle compris sous l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur le premier.



Soit AD la perpendiculaire abaissée du point A sur BC: on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

Car, dans le triangle rectangle ABD, on a $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; or le triangle rectangle ACD donne $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$ et, la droite BD étant égale à BC—CD ou à CD—BC suivant que l'angle B est aigu ou obtus, on a, dans les deux cas, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC$

$\times CD$ (13); donc $(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$ ou $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

REMARQUE. Dans un triangle ABC , selon que le carré $\overline{AB}^2$ d'un côté est plus grand ou plus petit que la somme $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ des carrés faits sur les deux autres côtés, l'angle C opposé au premier côté AB est obtus ou aigu. Car si, dans le cas où l'on a, par exemple, $\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, l'angle C était droit ou obtus, on aurait $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (15) ou $\overline{AB}^2 > \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (17), ce qui est contre la supposition.

THÉORÈME XIX.

Dans tout triangle ABC , 1° la somme des carrés des deux côtés AB , AC est égale à deux fois le carré de la droite AD menée du sommet au milieu de la base, plus deux fois le carré de la moitié de la base; 2° la différence des carrés des deux côtés AB , AC est égale à deux fois le rectangle compris sous la base et la distance DE de son milieu au pied de la hauteur AE .



1° Le triangle ABD , où l'angle D est obtus, donne (1) $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2BD \times DE$ (17); le triangle ACD , où l'angle D est aigu, donne (2) $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD \times DE$ (18); or $CD = BD$ par hypothèse, donc $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$.

2° Retranchant (2) de (1), il vient $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 4BD \times DE$; or $4BD = 2BC$, donc $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2BC \times DE$.

THÉORÈME XX.

Dans tout quadrilatère $ABCD$, la somme des carrés

des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite MN qui joint les milieux des diagonales.



Menons BM et DM. Dans le triangle ABC, où la droite BM joint le sommet au milieu de la base AC, on a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AM}^2$ (19); dans le triangle ACD, où la droite DM joint le sommet au milieu de la base AC, on a, de même, $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{DM}^2 + 2\overline{AM}^2$; donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2 + 4\overline{AM}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2 + \overline{AC}^2$, puisque AC est double de AM. Mais, la droite MN étant menée du sommet au milieu de la base BD du triangle MBD, on a $\overline{BM}^2 + \overline{DM}^2 = 2\overline{MN}^2 + 2\overline{BN}^2$ et, par suite, $2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2 = 4\overline{MN}^2 + 4\overline{BN}^2 = 4\overline{MN}^2 + \overline{BD}^2$, puisque BD est double de BN; ajoutant de part et d'autre $\overline{AC}^2$, il vient $2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2 + \overline{AC}^2$, ou $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2$.

THÉORÈME XXI.

Dans tout trapèze, la somme des carrés des deux côtés AB, CD est égale à la somme des carrés des diagonales, moins deux fois le rectangle des bases.



Joignons les milieux M et N des diagonales AC, BD. On a, par le théorème précédent, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2$; or $MN = \frac{BC - AD}{2}$ (liv. II, 23); donc $2MN = BC - AD$ et, par suite,

$4\overline{MN}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC \times AD$ (13); donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC \times AD$; supprimant de part et d'autre $\overline{BC}^2$ et $\overline{AD}^2$, il reste $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BC \times AD$.

THÉORÈME XXII.

Dans tout parallélogramme ABCD, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales; et réciproquement.



1° La figure ABCD étant un parallélogramme, les diagonales AC, BD se coupent mutuellement en deux parties égales au point O; donc le triangle ABC donne $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BO}^2 + 2\overline{AO}^2$ (19) et, par suite, $2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 = 4\overline{BO}^2 + 4\overline{AO}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2$, puisqu'on a $BD = 2BO$ et $AC = 2AO$.

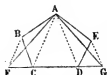
2° Réciproquement, lorsque, dans un quadrilatère ABCD, on a la relation $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$, la figure est un parallélogramme, ou, autrement, les diagonales AC, BD se coupent mutuellement en deux parties égales (liv. II, 19).

Car, si cela n'avait pas lieu et que M et N fussent les milieux des diagonales, on aurait $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2$ (20), ce qui est contre la supposition.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE V.

PROBLÈME PREMIER.

Construire un triangle équivalent à un polygône donné ABCDE, de tant de côtés qu'on voudra.



Joignons les extrémités A et C de deux côtés consécutifs AB, BC; par le point B, menons BF parallèle à AC jusqu'à la rencontre de DC prolongé, et joignons le point A au point F : le quadrilatère AFDE est équivalent au polygône proposé.

Car les triangles ABC, ACF ont la base commune AC, et même hauteur, puisque leurs sommets B et F sont situés sur une même droite BF parallèle à AC; donc ils sont équivalents (th. 5, cor. 1); or, si l'on ajoute le quadrilatère ACDE au triangle ABC, on obtient le polygône ABCDE; et si, d'autre part, on ajoute le même quadrilatère au triangle ACF, on a le quadrilatère AFDE; donc ce quadrilatère est équivalent au polygône.

On convertira de même le quadrilatère AFDE en un triangle AFG équivalent; donc le triangle AFG est équivalent au polygône proposé.

PROBLÈME II.

Trouver le côté d'un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.

1° Soient B et H la base et la hauteur du parallélogramme proposé, et X le côté du carré demandé.

$B \times H$ est la mesure du parallélogramme, et X^2 celle du carré (th. 3); donc il faut qu'on ait $B \times H = X^2$ et, par suite, $B : X :: X : H$; on trouvera donc le côté X en cherchant une moyenne proportionnelle entre la base B et la hauteur H du parallélogramme donné (liv. IV, prob. 2).

2^e L'aire d'un triangle étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur (th. 5), on voit, de même, que pour avoir le côté d'un carré équivalent au triangle proposé, il suffit de chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de sa base et sa hauteur.

PROBLÈME III.

Trouver le côté d'un carré équivalent à un polygone donné, de tant de côtés qu'on voudra.

Construisons d'abord un triangle équivalent au polygone proposé (1); cherchons ensuite le côté X du carré équivalent à ce triangle (2): X sera le côté du carré équivalent au polygone.

PROBLÈME IV.

Construire un carré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.

1^o Construisons un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit soient égaux aux côtés des carrés donnés (liv. III, prob. 21). Le carré fait sur l'hypoténuse de ce triangle sera le carré demandé (th. 15).

2^o Construisons un triangle rectangle dont l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit soient égaux aux côtés des carrés donnés (liv. III, prob. 24); le carré fait sur l'autre côté de l'angle droit sera le carré demandé (th. 15).

REMARQUE. On trouvera, par le même procédé (1°), un carré égal à la somme de tant de carrés donnés qu'on voudra, ou au produit d'un carré donné par un nombre entier.

PROBLÈME V.

Construire un carré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux polygones donnés.

Cherchons les côtés des carrés équivalents aux deux polygones donnés (3), et la construction s'achèvera en faisant un carré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés (4).

REMARQUE. On construira de même un carré égal à la somme de tant de polygones donnés qu'on voudra, ou au produit d'un polygone donné par un nombre entier.

PROBLÈME VI.

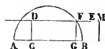
Construire, sur une droite donnée A, un rectangle équivalent à un rectangle donné.

Soient B et C les deux dimensions du rectangle donné, et X la dimension inconnue du rectangle cherché.

$B \times C$ est l'aire du premier rectangle (th. 3), et $A \times X$ celle du second; donc il faut qu'on ait $A \times X = B \times C$ et, par suite, $A : B :: C : X$; on trouvera donc le côté X en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois droites données A, B, C (liv. IV, prob. 1).

PROBLÈME VII.

Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les deux dimensions fassent une somme donnée AB.



Soit M le côté du carré donné. Sur AB , comme diamètre, décrivons une demi-circonférence ; en un point quelconque C de AB , élevons une perpendiculaire $CD = M$; menons DE parallèle à AB ; et, du point F où DE rencontre la circonférence, abaissons la perpendiculaire FG sur AB : les deux droites AG , BG sont les dimensions du rectangle demandé.

Car leur somme $AG + BG = AB$, et leur produit $AG \times BG = FG^2$ (liv. IV, 18) $= DC^2 = M^2$; donc le rectangle construit sous AG et BG est équivalent au carré donné (th. 3).

REMARQUE. Pour que le problème soit possible, il faut que le côté M du carré donné n'excède pas le rayon de la circonférence, c'est-à-dire la demi-somme des deux dimensions du rectangle demandé. Il en résulte que *parmi tous les rectangles de même périmètre, le carré est un maximum.*

PROBLÈME VIII.

Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les deux dimensions aient entre elles une différence donnée AB .

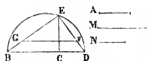


Soit M le côté du carré donné. Sur la droite AB , comme diamètre, décrivons une circonférence ; au point A , menons la tangente $AC = M$; joignons le point C au centre O , et prolongeons CO jusqu'à la rencontre de la circonférence au point D : la sécante entière CD et sa partie extérieure CE sont les deux dimensions du rectangle demandé.

Car leur différence $CD - CE = DE = AB$, et leur produit $CD \times CE = AC^2$ (liv. IV, 21) $= M^2$; donc le rectangle construit sous CD et CE est équivalent au carré donné (th. 3).

PROBLÈME IX.

Trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport donné de M à N.



Soit A le côté du carré donné, et X celui du carré cherché. Il faut qu'on ait $X^2 : A^2 :: M : N$. Pour substituer au rapport $M : N$ celui de deux carrés, prenons, sur la droite indéfinie BD, $BC=M$ et $CD=N$; sur la droite entière BD, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; au point C, élevons, sur BD, une perpendiculaire CE qui rencontre la circonférence en un point E; puis, menons les cordes EB, ED. Le triangle rectangle EBD donne $\overline{EB}^2 : \overline{ED}^2 :: BC : DC$ (th. 15, rem. 2), ou $:: M : N$; donc $X^2 : A^2 :: \overline{EB}^2 : \overline{ED}^2$ et, par suite, $X : A :: EB : ED$; on trouvera donc le côté X en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois droites connues ED, EB, A (liv. IV, prob. 1).

Pour achever la construction, prenons, sur la droite indéfinie ED, une quantité $EF = A$, puis, menons FG parallèle à BD jusqu'à la rencontre de EB en G; la droite EG sera la quatrième proportionnelle demandée.

PROBLÈME X.

Construire un polygone semblable à un polygone donné P et qui soit à ce polygone dans le rapport donné de M à N.

Soit A un côté du polygone P, et X le côté homologue dans le polygone cherché.

LIVRE V.

Puisque les polygones semblables sont entre eux les carrés des côtés homologues (th. 11), il faut que proportion $X^2 : A^2 :: M : N$. On trouvera donc le côté X en cherchant le côté d'un carré qui soit au carré donné A^2 comme $M : N$ (9); ensuite, on décrira sur X, comme côté homologue à A, un polygone semblable à P (liv. IV, prob. 5).

PROBLÈME XI.

Construire un polygone semblable à un polygone donné P et équivalent à un polygone donné Q.

Soit A un côté de la figure P, Y le polygone demandé, X le côté de Y homologue à A.

Les polygones P et Y étant semblables, on a $P : Y :: A^2 : X^2$ (th. 11); mais il faut que Y soit équivalent à Q; donc $P : Q :: A^2 : X^2$; remplaçant P et Q par des carrés équivalents M^2 et N^2 (3), on a $M^2 : N^2 :: A^2 : X^2$ et, par suite, $M : N :: A : X$; on trouvera donc le côté X, en cherchant les côtés M et N des carrés équivalents aux polygones P et Q, puis, une quatrième proportionnelle aux trois droites connues M, N, A. La construction s'achèvera, en décrivant sur X, homologue à A, un polygone semblable à P.

PROBLÈME XII.

Deux polygones semblables P et Q étant donnés, construire un polygone semblable à ceux-ci, et qui soit égal à leur somme ou à leur différence.

Soient A et B deux côtés homologues dans les polygones proposés.

1° Construisons un triangle rectangle dont les côtés de

l'angle droit soient égaux à A et B; puis, sur l'hypoténuse C de ce triangle, comme côté homologue à B, décrivons un polygône R semblable à Q; on aura $R = P + Q$.

En effet, P et Q étant semblables, on a $P : Q :: A^2 : B^2$ (th. 11), d'où l'on déduit $(P + Q) : Q :: (A^2 + B^2) : B^2$; or $A^2 + B^2 = C^2$, donc $(P + Q) : Q :: C^2 : B^2$; mais, R étant semblable à Q, on a aussi la proportion $R : Q :: C^2 : B^2$; donc $R = P + Q$.

2° En supposant $A > B$, construisons un triangle rectangle dont A soit l'hypoténuse et B l'un des côtés de l'angle droit; ensuite, sur l'autre côté C de l'angle droit, comme côté homologue à B, décrivons un polygône R semblable à Q; on aura $R = P - Q$.

La démonstration est analogue à celle qui précède.

LIVRE VI.

LES POLYGONES RÉGULIERS

ET LA MESURE DU CERCLE.

DÉFINITIONS.

1. Un polygone *régulier* est un polygone à la fois équiangle et équilatéral.

2. Le *centre* et le *rayon* d'un polygone régulier sont le centre et le rayon du cercle circonscrit au polygone.

3. L'*apothème* d'un polygone régulier est le rayon du cercle inscrit dans le polygone.

4. L'angle formé par les rayons, menés du centre d'un polygone régulier aux extrémités d'un côté, est l'*angle au centre* du polygone.

5. La partie d'un polygone régulier, comprise entre les rayons menés à deux sommets non consécutifs, s'appelle *secteur polygonal régulier*.

6. Lorsqu'un cercle est situé entièrement dans une surface plane, terminée de toutes parts, on dit que le contour de cette surface *enveloppe* la circonférence.

La circonférence elle-même est considérée comme un cas particulier de toutes les lignes *enveloppantes*.

7. Dans deux cercles différents, on nomme *arcs semblables*, *secteurs semblables*, *segments semblables*, ceux qui correspondent à des angles au centre égaux entre eux.

THÉORÈME PREMIER.

Lorsqu'une circonférence est divisée en trois ou en un plus grand nombre de parties égales, le polygone

ABCDE, qui a pour sommets les points de division, est un polygone régulier inscrit; et réciproquement, lorsqu'un polygone régulier est inscrit dans un cercle, ses sommets divisent la circonférence en parties égales.



1° Tous les arcs AB , BC , CD , etc., étant égaux par hypothèse, les cordes AB , BC , CD , etc., sont égales entre elles; de plus, les angles inscrits A , B , C , etc., ayant pour mesure des arcs égaux, sont égaux entre eux; donc le polygone $ABCDE$, à la fois équiangle et équilatéral, est un polygone régulier.

2° Les cordes AB , BC , CD , etc., étant égales par hypothèse, les arcs AB , BC , CD , etc., sont égaux entre eux; donc les sommets A , B , C , D , E divisent la circonférence en parties égales.

COROLLAIRE 1. Soit ABC un polygone régulier inscrit.



Prenons les milieux M , N , P de chacun des arcs sous-tendus par ses côtés, et menons MA , MB , NB , NC , etc. Il en résulte un polygone inscrit $AMBNCP$, qui est régulier, puisque ses sommets divisent la circonférence en parties égales, et qui a deux fois

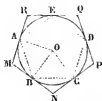
plus de côtés que le premier, puisqu'à un côté quelconque AB de celui-ci correspondent deux côtés de l'autre.

COROLLAIRE 2. Réciproquement, étant donné le polygone régulier inscrit $AMBNCP$, d'un nombre pair de côtés, pour inscrire à la même circonférence un polygone régulier d'un nombre de côtés deux fois moindre, on voit qu'il suffit, en suivant le contour du polygone proposé dans un même sens, de joindre le premier sommet A au troisième sommet B , le troisième B au cinquième C , et ainsi de suite, quel que soit le nombre des sommets, jusqu'à ce qu'on soit revenu au point A d'où l'on est parti.

REMARQUE. Dans les triangles MAB, NBC, etc., on a $AB < MA + MB$, $BC < NB + NC$, etc., donc le contour du polygone inscrit ABC est moindre que celui du polygone inscrit AMBNCP d'un nombre double de côtés.

THÉORÈME II.

Lorsqu'une circonférence est divisée en trois ou en un plus grand nombre de parties égales, le polygone MNPQR, dont les côtés touchent la circonférence aux points de division, est un polygone régulier circonscrit; et réciproquement, lorsqu'un polygone régulier est circonscrit à un cercle, les points de contact divisent la circonférence en parties égales.

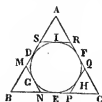


1° Menons les cordes AB, BC, CD, etc., qui sont égales entre elles (liv. III, 11). Chacun des angles MAB, MBA, NBC, etc., étant formé par une corde et une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, or tous ces arcs sont égaux par hypothèse, donc l'angle $MAB = MBA = NBC$, etc., et les triangles MAB, NBC, PCD, etc., ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc l'angle $M = N = P$, etc.; le côté $MA = MB = NB$, etc., et, par suite, MN double de NB est égal à MR double de MA; NP double de NC est égal à MN double de NB, et ainsi de suite; donc le polygone MNPQR, à la fois équiangle et équilatéral, est un polygone régulier.

2° Le rayon OA étant perpendiculaire à la tangente MR et le rayon OB perpendiculaire à la tangente MN, les angles A et B du quadrilatère MAOB sont droits; donc l'angle AOB a pour supplément l'angle M; pareillement, l'angle BOC a pour supplément l'angle N; or $M = N$ par hypothèse, donc $AOB = BOC$ et, par suite, l'arc $AB = BC$; on a de

même $BC = CD = DE = AE$; donc les points de contact divisent la circonférence en parties égales.

COROLLAIRE 1. Soit ABC un polygône régulier circonscrit.



Par les points G, H, I , milieux des arcs DE, EF, FD , menons des tangentes qui rencontrent les côtés du polygône ABC aux points M, N, P , etc. Il en résulte un polygône circonscrit d'un nombre double de côtés, et qui est régulier, puisque les points de contact G, E, H , etc., divisent la circonférence en parties égales.

COROLLAIRE 2. Réciproquement, étant donné le polygône circonscrit $MNPQRS$ d'un nombre pair de côtés, pour circonscrire à la même circonférence un polygône régulier ABC d'un nombre de côtés deux fois moindre, il suffit, en suivant le contour du polygône proposé dans un même sens, de prolonger, à partir d'un côté quelconque SM , les côtés consécutifs de rang impair SM et NP , NP et QR , QR et SM , jusqu'à leur rencontre.

REMARQUE. Dans les triangles BMN, CPQ, ARS , on a $MN < BM + BN$, $PQ < CP + CQ$, $RS < AR + AS$; d'ailleurs les côtés MS, NP, QR sont communs aux contours des deux polygones, donc le contour du polygône $MNPQRS$ est moindre que celui du polygône circonscrit ABC d'un nombre de côtés deux fois moindre.

THÉORÈME III.

A tout polygône régulier $ABCDE$, on peut circonscrire un cercle, mais on n'en peut circonscrire qu'un.



Soit O le centre de la circonférence qui passe par les trois points A, B, C . Menons les rayons OA, OB, OC , et joignons le point O au point D .

Dans le triangle OBC , le rayon $OB = OC$ et, par suite, l'angle $OBC = OCB$;

mais, le polygône proposé étant régulier, l'angle $ABC = BCD$; donc $ABC - OBC = BCD - OCB$, ou $ABO = DCO$; d'ailleurs $AB = CD$ par hypothèse; donc les triangles ABO , DCO ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc le troisième côté $OA = OD$; donc le point D est situé sur la circonférence qui passe par les trois points A , B , C ; on prouverait de même que le point E appartient à la même circonférence, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des sommets; donc la circonférence, qui passe par les trois points A , B , C , est circonscrite au polygône proposé.

Il est d'ailleurs impossible de circonscrire un autre cercle à ce polygône; car, par les trois points donnés A , B , C non en ligne droite, on ne peut faire passer qu'une seule circonférence (liv. III, 2, cor. 2).

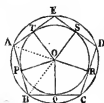
COROLLAIRE 1. Tous les triangles OAB , OBC , OCD , etc., sont isoscèles et ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc tout polygône régulier est décomposable en autant de triangles isoscèles, égaux entre eux, qu'il a de côtés, chacun de ces triangles ayant pour sommet le centre du polygône et, pour base, un de ses côtés.

COROLLAIRE 2. Tous les angles au centre AOB , BOC , COD , etc., opposés à des côtés égaux, sont égaux entre eux; donc l'angle au centre d'un polygône régulier est égal au quotient de la division de quatre angles droits par le nombre des côtés du polygône.

THÉORÈME IV.

Dans tout polygône régulier $ABCDE$, on peut inscrire un cercle, mais on n'en peut inscrire qu'un.

Soit O le centre du cercle circonscrit au polygône (3), et OP , OQ , OR , etc., les perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés.



1° Les cordes AB, BC, CD, etc., égales par hypothèse, sont également éloignées du centre ; donc $OP = OQ = OR$, etc., et, si du point O comme centre, avec un rayon égal à OP, on décrit une circonférence, elle passera par tous les points P, Q, R, etc., et touchera ainsi chaque côté en son milieu (liv. III, 3 et 8) ; donc cette circonférence est inscrite dans le polygone.

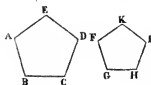
2° Il est impossible d'inscrire un autre cercle dans le même polygone. Car, le centre de tout cercle inscrit étant un point également distant des côtés AE, AB, BC, est situé sur chacune des deux bissectrices AO, BO des angles A et B, lesquelles se rencontrent en un seul point O ; donc tous les cercles inscrits dans le polygone ABCDE ont même centre et même rayon et ne forment qu'un seul et même cercle.

REMARQUE 1. *Le cercle inscrit dans un polygone régulier et le cercle circonscrit sont concentriques.*

REMARQUE 2. *Lorsqu'un polygone régulier est circonscrit à un cercle, chaque côté est divisé au point de contact en deux parties égales.*

THÉORÈME V.

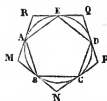
Deux polygones réguliers ABCDE, FGHIK, d'un même nombre de côtés, sont semblables.



La somme des angles du pentagone ABCDE est égale à deux angles droits multipliés par $(5 - 2)$, ou à six angles droits ; mais, par hypothèse, ce polygone est équiangle,

donc chacun des angles A, B, C, etc., est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit ; il en est de même de chacun des angles F, G, H, etc., du pentagone FGHIC ; donc ces deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun ; d'ailleurs, puisqu'ils sont équilatéraux, on a évidemment la suite de rapports égaux $AB : FG :: BC : GH :: CD : HI$, etc., donc ABCDE est semblable à FGHIC.

COROLLAIRE 1. *Lorsqu'un polygone régulier ABCDE est*



inscrit dans un cercle, le polygone MNPQR, formé par les tangentes menées aux sommets du polygone inscrit ou aux milieux des arcs sous-tendus par ses côtés, est un polygone circonscrit semblable au premier.

Car, les arcs AB, BC, CD, etc., étant égaux (1), les points de contact A, B, C, D, E ou F, G, H, I, K divisent la circonférence en parties égales ; donc MNPQR est un polygone régulier (2) ; d'ailleurs il a le même nombre de côtés que le polygone ABCDE ; donc ils sont semblables.

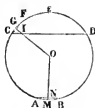
COROLLAIRE 2. *Réciproquement, lorsqu'un polygone régulier MNPQR est circonscrit à un cercle, le polygone ABCDE, qui a pour sommets les points de contact des côtés du polygone circonscrit, ou les milieux des arcs compris entre ces côtés, est un polygone inscrit semblable au premier (2).*

REMARQUE. Le point A, milieu de l'arc FK, est situé sur le rayon OM (liv. III, 19, rem.) ; on voit de même que le point B est situé sur le rayon ON, et ainsi de suite.

THÉORÈME VI.

On peut inscrire dans un cercle un polygone régulier

dont le côté soit moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra.



Soit AB une corde aussi petite qu'on voudra, et CD le côté d'un polygone régulier inscrit. Supposons l'arc $CD > AMB$, et prenons l'arc $CE = \frac{1}{2} CD$, l'arc $CF = \frac{1}{2} CE$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous obtenions un arc, CG par exemple, plus petit que AMB ; la corde CG sera plus petite que la corde AB (liv. III, 12); or CG est le côté d'un polygone régulier inscrit (1), donc on peut inscrire dans un cercle un polygone régulier dont le côté soit moindre qu'une droite donnée AB aussi petite qu'on voudra.

COROLLAIRE. Si l'on prend, sur un rayon quelconque OM , une quantité MN aussi petite qu'on voudra, et qu'on mène, par le point N , une corde AB perpendiculaire à OM , on pourra inscrire dans le cercle un polygone régulier dont le côté CG soit plus petit que la corde AB ; cela étant, la distance OI du centre O à la corde CG est plus grande que ON (liv. III, 14); donc $OM - OI < OM - ON$, ou $OM - OI < MN$; donc on peut inscrire dans un cercle un polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés, pour que la différence entre son rayon OM et son apothème OI soit moindre qu'une droite donnée MN , aussi petite qu'on voudra.

THÉORÈME VII.

On peut circonscrire à un cercle un polygone régulier dont le côté soit moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra.

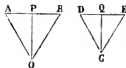


Soit AB une tangente divisée au point de contact C en deux parties égales, et qu'on peut supposer aussi petite qu'on voudra. Menons les droites OA, OB qui rencontrent la circonférence aux points D et E , et concevons la circonférence divisée en un nombre assez grand de parties égales pour que l'une de ces parties, FCG par exemple, soit plus petite que l'arc DCE : la corde FG sera le côté d'un polygone régulier inscrit (1), et, si l'on suppose $CF = CG$, les rayons OF, OG prolongés rencontreront AB en des points M et N situés entre A et B ; de sorte qu'on aura $MN < AB$: or MN est le côté d'un polygone régulier circonscrit (5, rem.), donc on peut circonscrire à un cercle un polygone régulier dont le côté soit moindre qu'une droite donnée AB aussi petite qu'on voudra.

COROLLAIRE. Dans le triangle COM , on a $OM - OC < CM$; or CM est la moitié du côté MN qui est aussi petit qu'on voudra, donc on peut circonscrire à un cercle un polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés, pour que la différence entre son rayon OM et son apothème OC soit moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra.

THÉORÈME VIII.

Les périmètres des polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme leurs rayons ou comme leurs apothèmes; et leurs surfaces sont entre elles comme les carrés de ces mêmes rayons ou apothèmes.



Soit AB le côté d'un polygone régulier, O son centre, OA son rayon, et OP son apothème; soit, pareillement, DE le côté d'un autre polygone régulier, C son centre,

CD son rayon, et CQ son apothème : en supposant que ces deux polygones aient le même nombre de côtés et désignant leurs périmètres par pér. AB et pér. DE, on aura pér. AB : pér. DE :: OA : CD ou :: OP : CQ.

En effet, ces deux polygones, ayant le même nombre de côtés, sont semblables (5); donc pér. AB : pér. DE :: AB : DE (liv. iv, 13); mais A est la moitié de l'angle du premier polygone (3, cor. 1) et D la moitié de l'angle du second; donc $A = D$; on a de même $B = E$; donc les triangles AOB, DCE ont les angles égaux chacun à chacun, ainsi que les triangles rectangles AOP, DCQ, et leurs côtés homologues donnent $AB : DE :: OA : CD :: OP : CQ$; donc, à cause du rapport commun AB : DE, il vient pér. AB : pér. DE :: OA : CD ou :: OP : CQ.

Si l'on désigne par surf. AB et surf. DE les surfaces des deux polygones, on aura, de même, surf. AB : surf. DE :: $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$ (liv. v, 11), $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{OA}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{OP}^2 : \overline{CQ}^2$, et, par suite, surf. AB : surf. DE :: $\overline{OA}^2 : \overline{CD}^2$ ou :: $\overline{OP}^2 : \overline{CQ}^2$.

THÉORÈME IX.

On peut inscrire et circonscrire à un cercle deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, tels que la différence de leurs périmètres ou celle de leurs surfaces soit moindre qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.



Soit MN le côté d'un polygone régulier inscrit, PQ celui du polygone semblable circonscrit, OM et OP leurs rayons, OA et OB leurs apothèmes.

1° On a pér. PQ : pér. MN :: OB : OA (8), d'où l'on déduit (pér. PQ — pér. MN) : pér.

$PQ :: (OB - OA) : OB$; or, si l'on multiplie suffisamment le nombre des côtés de chaque polygône, on pourra faire en sorte que la différence $(OB - OA)$ entre le rayon et l'apothème du polygône inscrit soit moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra (6, cor.) ; donc le dernier rapport $(OB - OA) : OB$ de la proportion précédente peut être supposé aussi petit qu'on voudra ; il en est de même du premier rapport (pér. PQ — pér. MN) : pér. PQ , lequel est égal au second ; mais pér. PQ diminue lorsqu'on double le nombre de ses côtés (2, rem.), ce qui tend à augmenter le premier rapport ; donc la différence (pér. PQ — pér. MN) peut être rendue moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra.

2° On a surf. PQ : surf. $MN :: \overline{OB}^2 : \overline{OA}^2$ (8) ; d'où l'on tire (surf. PQ — surf. MN) : surf. $PQ :: (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2) : \overline{OB}^2$; or $\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{AM}^2 = \frac{1}{4} \overline{MN}^2$, et l'on peut inscrire dans le cercle un polygône régulier dont le côté MN soit moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra (6) ; donc le dernier rapport $\frac{1}{4} \overline{MN}^2 : \overline{OB}^2$ peut être supposé aussi petit qu'on voudra ; donc il en est de même du premier rapport (surf. PQ — surf. MN) : surf. PQ ; d'ailleurs surf. PQ diminue évidemment lorsqu'on double le nombre de ses côtés, ce qui tend à augmenter le premier rapport ; donc la différence (surf. PQ — surf. MN) peut être rendue moindre qu'une surface donnée aussi petite qu'on voudra.

THÉORÈME X.

La circonférence est plus grande que le contour de tout polygône inscrit ABCDE.

En effet, l'arc AB est plus grand que la corde AB qui a



les mêmes extrémités (ax. 12); pareillement, l'arc BC est plus grand que la corde BC; l'arc CD est plus grand que la corde CD, et ainsi de suite; donc la circonférence entière est plus grande que le contour du polygone inscrit ABCDE.

THÉORÈME XI.

La circonférence est moindre que toute autre ligne enveloppante.



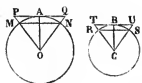
Il est évident que, parmi toutes les lignes qui enveloppent la circonférence ABC (déf. 6), il en est au moins une qui n'en admet pas de plus courte qu'elle; donc, si l'on prouve que toute ligne enveloppante MNPQR, autre que ABC, en admet une plus courte qu'elle, il s'ensuivra que la circonférence sera la plus courte de toutes.

Pour cela, prenons, sur la circonférence ABC, un point quelconque D situé hors de la ligne MNPQR, et menons, par ce point, une tangente qui rencontre MNPQR en deux points R et P (ax. 4): on aura la droite PR plus petite que la ligne PQR; ajoutant de part et d'autre la même ligne RMNP, on obtiendra une autre ligne enveloppante MNPR plus courte que MNPQR; donc toute ligne enveloppante MNPQR en admet une plus courte qu'elle; donc la circonférence ABC est la plus courte de toutes les lignes enveloppantes.

COROLLAIRE. *La circonférence est moindre que le contour de tout polygone circonscrit.*

THÉORÈME XII.

Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés de ces mêmes rayons.



Soit MN le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle O, PQ le côté du polygone semblable circonscrit, et OA son apothème ; soient, pareillement, RS et TU les côtés de deux polygones semblables aux premiers, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle C, et CB l'apothème du polygone circonscrit.

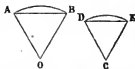
1° On a pér. MN : OA :: pér. RS : CB, et pér. PQ : OA :: pér. TU : CB (8). Mais, circ. OA étant plus grande que pér. MN et plus petite que pér. PQ (10 et 11), le rapport (circ. OA : OA) est compris entre (pér. MN : OA) et (pér. PQ : OA) ; pareillement, circ. CB étant plus grande que pér. RS et plus petite que pér. TU, le rapport (circ. CB : CB) est compris entre (pér. RS : CB) et (pér. TU : CB) ou, ce qui revient au même, entre (pér. MN : OA) et (pér. PQ : OA) ; donc les rapports constants (circ. OA : OA), (circ. CB : CB) sont compris tous deux entre les rapports (pér. MN : OA), (pér. PQ : OA) dont la différence est égale au rapport (pér. PQ — pér. MN) : OA ; mais (pér. PQ — pér. MN) peut être supposée moindre qu'une droite donnée aussi petite qu'on voudra (9) et, par suite, le rapport (pér. PQ — pér. MN) : OA est lui-même aussi petit qu'on voudra ; donc les rapports (circ. OA : OA), (circ. CB : CB) sont égaux entre eux et forment la proportion circ. OA : OA :: circ. CB : CB ou, autrement, circ. OA : circ. CB :: OA : CB.

2° On a surf. MN : $\overline{OA}^2$:: surf. RS : $\overline{CB}^2$ (8), et surf. PQ

: $\overline{OA}^2 :: \text{surf. TU} : \overline{CB}^2$, d'où l'on conclut, par un raisonnement analogue au précédent, que les rapports constants (surf. OA : $\overline{OA}^2$), (surf. CB : $\overline{CB}^2$) sont compris entre les rapports (surf. MN : $\overline{OA}^2$), (surf. PQ : $\overline{OA}^2$) et, par suite, qu'on a la proportion surf. OA : $\overline{OA}^2 :: \text{surf. CB} : \overline{CB}^2$ ou, autrement, surf. OA : surf. CB :: $\overline{OA}^2 : \overline{CB}^2$.

THÉORÈME XIII.

Les arcs semblables AB, DE sont entre eux comme leurs rayons, et les secteurs semblables OAB, CDE, comme les carrés de leurs rayons.



1° Dans le cercle dont OA est le rayon, on a la proportion l'angle O : quatre angles droits :: arc AB : circ. OA (liv. iv, 22); pareillement, dans le cercle CD, on a l'angle C : quatre angles droits :: arc DE : circ. CD; mais l'angle O = C par hypothèse (déf. 7); donc, à cause du rapport commun, il vient arc AB : arc DE :: circ. OA : circ. CD; or circ. OA : circ. CD :: OA : CD (12); donc arc AB : arc DE :: OA : CD.

2° On a l'angle O : quatre angles droits :: secteur OAB : cercle OA (liv. iv, 22, rem.), et l'angle C : quatre angles droits :: secteur CDE : cercle CD, d'où l'on conclut, par un raisonnement analogue au précédent, secteur OAB : secteur CDE :: $\overline{OA}^2 : \overline{CD}^2$.

COROLLAIRE. Les triangles OAB, CDE, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables; donc on a la proportion : triangle OAB : triangle CDE :: $\overline{OA}^2 : \overline{CD}^2$ (liv. v, 10) ou :: secteur OAB : secteur CDE; on en déduit (secteur OAB — triangle OAB) : (secteur CDE

— triangle CDE) :: $\overline{OA}^2 : \overline{CD}^2$, ou segment AB : segment DE :: $\overline{OA}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; donc les segments semblables sont entre eux comme les carrés de leurs bases.

THÉORÈME XIV.

L'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.



Appelons surf. OA l'aire du cercle dont OA est le rayon. On aura surf. OA = circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA.

En effet, soit MN le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, PQ le côté du polygone semblable circonscrit, OB et OA les apothèmes de ces polygones.

On a surf. MN = pér. MN $\times \frac{1}{2}$ OB, et surf. PQ = pér. PQ $\times \frac{1}{2}$ OA (liv. v, 8); or surf. OA est comprise évidemment entre surf. MN et surf. PQ; d'ailleurs circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA est compris entre pér. MN $\times \frac{1}{2}$ OB et pér. PQ $\times \frac{1}{2}$ OA (10 et 11) ou entre surf. MN et surf. PQ; donc les nombres constants surf. OA et circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA sont compris entre les nombres surf. MN et surf. PQ dont la différence peut être supposée aussi petite qu'on voudra (9); donc on a surf. OA = circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA.

COROLLAIRE. Soit π le rapport constant d'une circonférence à son diamètre (12), et R le rayon d'un cercle quelconque; on aura circ. R = 2 R $\times \pi = 2 \pi R$ et, par suite, circ. R $\times \frac{1}{2}$ R = 2 $\pi R \times \frac{1}{2}$ R = πR^2 ; donc l'aire d'un cercle est égale au produit du carré de son rayon par le rapport de la circonférence au diamètre.

REMARQUE. On voit que le cercle est équivalent à un triangle qui aurait pour base une droite équivalente à la circonférence, et dont la hauteur serait égale au rayon (liv. v, 5); donc, si l'on pouvait trouver une droite équivalente à la cir-

conférence d'un cercle donné, le côté du carré équivalent au cercle s'obtiendrait en cherchant une moyenne proportionnelle entre cette droite et la moitié du rayon (liv. IV, prob. 2), et on aurait ainsi résolu le problème de la *quadrature du cercle*, qui consiste à construire, avec la règle et le compas, un carré équivalent à un cercle dont le rayon est donné.

THÉORÈME XV.

L'aire d'un secteur AOB est égale au produit de sa base par la moitié du rayon.



En effet, on a la proportion secteur AOB : cercle OA :: arc AB : circ. OA (liv. IV, 22, rem.) ; multipliant les termes du dernier rapport par $\frac{1}{2}$ OA, il vient secteur AOB : cercle OA :: arc AB $\times \frac{1}{2}$ OA : circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA ; or cercle OA = circ. OA $\times \frac{1}{2}$ OA (14), donc secteur AOB = arc AB $\times \frac{1}{2}$ OA.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE VI.

PROBLÈME PREMIER.

Inscrire un carré dans un cercle donné.



Menons les diamètres AC, BD perpendiculaires entre eux (liv. III, prob. 6) ; et traçons les cordes AB, BC, CD, AD : le quadrilatère ABCD est le carré demandé.

Car la circonférence est divisée en quatre parties égales aux points A, B, C, D (liv. III, 6, et liv. VI, 1).

REMARQUE 1. Le triangle rectangle isoscèle AOB donne $AB : AO :: \sqrt{2} : 1$ (liv. v, 15, cor. 2); donc le côté du carré inscrit est au rayon comme la racine carrée de 2 est à l'unité.

REMARQUE 2. La circonférence étant divisée en quatre parties égales aux points A, B, C, D, on peut ensuite la diviser successivement en 8, 16, 32, etc., parties égales (liv. III, prob. 12); donc on peut inscrire dans un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés égal à 2^n , n étant un nombre entier plus grand que l'unité.

PROBLÈME II.

Circonscrire un carré à un cercle donné.



Traçons, comme précédemment, les diamètres AC, BD perpendiculaires entre eux; puis, aux extrémités de ces diamètres, menons des tangentes à la circonférence : le quadrilatère MNPQ, qui en résulte, est le carré demandé.

Car les points de contact A, B, C, D divisent la circonférence en quatre parties égales (th. 2).

REMARQUE 1. Les droites MN et BD sont égales, comme côtés opposés d'un rectangle; donc le côté du carré circonscrit est égal au diamètre.

REMARQUE 2. En général, on peut circonscrire à un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés égal à 2^n , n étant un nombre entier plus grand que l'unité (prob. 1, rem. 2, et th. 2).

PROBLÈME III.

Inscrire, dans un cercle donné, un hexagone régulier, ensuite un triangle équilatéral.



1° Supposons le problème résolu, et soit AB un côté de l'hexagone. L'angle AOB est le sixième de 4 angles droits (th. 3, cor. 2) ou les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit ; donc la somme des autres angles A et B du triangle AOB est égale à $\left(2 - \frac{2}{3}\right)$ ou à $\frac{4}{3}$ d'angle droit ; or ces deux angles sont égaux, puisque le rayon $OA = OB$; donc chacun d'eux est égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit ou à l'angle AOB ; donc le triangle AOB est équilatéral (liv. II, 10, cor.), et le côté AB de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.

Ainsi, pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné, il suffit d'inscrire six droites consécutives AB , BC , CD ... AF , égales au rayon (liv. III, prob. 9).

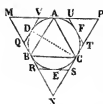
2° L'hexagone $ABCDEF$ étant inscrit, si l'on mène AC , CE , EA , on formera le triangle équilatéral ACE (th. 1).

REMARQUE 1. Le losange $ABCO$ donne $\overline{AC}^2 + \overline{OB}^2 = 4 \overline{AB}^2$ (liv. V, 22) $= 4 \overline{OB}^2$; retranchant $\overline{OB}^2$ de part et d'autre, il vient $\overline{AC}^2 = 3 \overline{OB}^2$; donc $\overline{AC}^2 : \overline{OB}^2 :: 3 : 1$ et, par suite, $AC : OB :: \sqrt{3} : 1$; donc le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine carrée de 3 est à l'unité.

REMARQUE 2. En général, on peut inscrire dans un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés égal à 3×2^n , n étant un nombre entier qui peut être nul ou égal à l'unité.

PROBLÈME IV.

Circoncrire à un cercle donné un triangle équilatéral, ensuite un hexagone régulier.



1° Par les sommets A, B, C du triangle équilatéral inscrit, menons des tangentes qui se rencontrent en des points M, N, P : le polygone MNP, qui en résulte, est le triangle demandé.

Car les points de contact A, B, C divisent la circonférence en trois parties égales (th. 1 et 2).

2° Par les points D, E, F, milieux des arcs AB, BC, AC, menons des tangentes qui se terminent aux côtés du triangle MNP : le polygone U V Q R S T, qui en résulte, est l'hexagone demandé (th. 2).

REMARQUE 1. Les points B et C étant les milieux des côtés MN, NP du triangle MNP (th. 4, rem. 2), la droite BC = $\frac{1}{2}$ MP (liv. II, 22, rem. 2), ou MP = 2 BC; donc le côté du triangle équilatéral circonscrit est double du côté du triangle équilatéral inscrit dans la même circonférence.

REMARQUE 2. La droite CD, divisant la circonférence en deux parties égales, est un diamètre (liv. III, 5, cor.) ; donc les tangentes VQ, NP sont parallèles (liv. III, 4) et, par suite, le triangle MVQ est semblable au triangle équilatéral MPN (liv. IV, 3); donc MV = VQ = UV; on a de même PU = TU = UV; donc MP = 3 UV; donc le côté de l'hexagone régulier circonscrit est le tiers du côté du triangle équilatéral circonscrit à la même circonférence.

REMARQUE 3. En général, on peut circonscrire à un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés égal à 3×2^n , n étant un nombre entier qui peut être nul ou égal à l'unité.

PROBLÈME V.

Inscrire, dans un cercle donné, un décagone régulier, puis un pentagone, ensuite un pentédécagone.



1° Supposons le problème résolu, et soit AB un côté du décagone. L'angle AOB est le dixième de 4 angles droits (th. 3, cor. 2) ou les $\frac{2}{5}$ d'un angle droit; donc la somme des autres angles A et B du triangle AOB est égale à $\left(2 - \frac{2}{5}\right)$ ou à $\frac{8}{5}$ d'angle droit; or ces deux angles sont égaux, puisque le rayon $OA = OB$; donc chacun d'eux est les $\frac{4}{5}$ d'un droit ou le double de l'angle AOB . Cela étant, divisons l'angle BAO en deux parties égales par la droite AC qui rencontre OB en C : l'angle $CAO = AOC$ et, par suite, $OC = AC$; de plus, l'angle ACB , extérieur au triangle AOC , est égal à la somme des deux angles CAO , AOC , ou au double de l'angle AOC ou enfin à l'angle ABC ; donc $AB = AC = OC$; mais, la droite AC étant bissectrice de l'angle BAO , on a $AO : AB :: OC : BC$ (liv. iv, 14) ou $OB : OC :: OC : BC$; donc le rayon OB est divisé au point C en moyenne et extrême parties, et le côté AB du décagone est égal au plus grand segment OC .

Ainsi, pour inscrire un décagone régulier dans un cercle donné, on inscrira dix droites consécutives $AB, BD, DE, \dots, AL$, égales au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême parties (liv. iv, prob. 4).

2° La circonférence étant ainsi divisée en dix parties égales, si l'on joint le premier point A de division au troisième D , le troisième au cinquième, etc., on formera le pentagone régulier inscrit $ADFHK$ (th. 1).

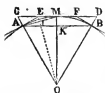
3° La corde AM étant égale au rayon, l'arc AM est la sixième partie de la circonférence (prob. 3); d'ailleurs AB en est la dixième partie, donc la longueur de l'arc BM est $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)$ ou $\frac{1}{15}$ par rapport à la circonférence; donc la corde BM est le côté du pentadécagone régulier inscrit.

REMARQUE 1. L'arc $DM = AD - AM$; donc sa longueur est $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$ ou $\frac{1}{30}$; donc l'arc BM est double de DM .

REMARQUE 2. En général, on peut inscrire ou circoncrire, à un cercle donné, un polygone régulier d'un nombre de côtés égal à 5×2^n ou à $3 \times 5 \times 2^n$, n étant un nombre entier qui peut être nul ou égal à l'unité.

PROBLÈME VI.

Étant donnés les périmètres p et P de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit, trouver les périmètres p' et P' des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.



Soient AB et CD les côtés des polygones p et P (th. 5, cor. 1). Joignons le point A au point de contact M , et menons les tangentes AE , BF , jusqu'à la rencontre de CD aux points E et F : la corde AM et la droite EF seront les côtés des polygones p' et P' (th. 1 et 2, cor. 1); le rayon OM sera perpendiculaire sur le milieu de AB au point K (liv. III, 8, cor. 2); la droite OE divisera l'angle AOM en deux parties égales (liv. III, 19, rem.) et sera perpendiculaire sur le milieu de AM au point I (liv. II, 12, cor. 2).

Cela étant, si l'on désigne par n le nombre des côtés des polygones p et P , on aura (1) $p = AB \times n = AK \times 2n$, (2) $P = CD \times n = CM \times 2n$, (3) $p' = AM \times 2n = MI \times 4n$, (4) $P' = EF \times 2n = EM \times 4n$.

Les relations (2) et (4) donnent $2P : P' :: CM : EM$; mais, la droite OE étant bissectrice de l'angle COM , on a $EC : EM :: OC : OM$ (liv. IV, 14) ou $:: P : p$ (th. 8): on en dé-

duit $(EC + EM)$ ou $CM : EM :: P + p : p$; or on a déjà $CM : EM :: 2P : P'$, donc $(P + p) : p :: 2P : P' = \frac{2Pp}{P+p}$. Cela étant, les relations (4) et (5) donnent $P' : p' :: EM : MI$; mais, dans les triangles rectangles EMI , AMK , les angles EMI , MAK sont égaux comme alternes-internes; donc ces triangles sont semblables (liv. IV, 4) et l'on a $EM : MI :: AM : AK$ ou $:: p' : p$; donc, à cause du rapport commun $EM : MI$, on aura $P' : p' :: p' : p$, d'où l'on tire $p' = \sqrt{P'p}$.

PROBLÈME VII.

Trouver une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre.

Prenons le diamètre du cercle pour unité linéaire, appelons π la longueur de la circonférence (liv. V, déf. 1) ou le rapport de la circonférence au diamètre, et supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver la valeur de π , approchée par défaut, à moins d'un dixième.

Le diamètre étant pris pour unité, le contour de l'hexagone régulier inscrit a pour mesure le nombre 3 (prob. 3), et celui de l'hexagone régulier circonscrit, le nombre $\frac{1}{2}\sqrt{3} \times 6$ (prob. 4, rem. 1 et 2) ou $2\sqrt{3}$. Cela étant, si, dans les formules $P' = \frac{2Pp}{P+p}$, $p' = \sqrt{P'p}$, on fait $P = 2\sqrt{3}$, $p = 3$, on trouvera, pour les nombres qui mesurent les contours des dodécagones réguliers circonscrit et inscrit, $P' = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$, $p' = \sqrt{\frac{36\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}}$. Substituant dans les mêmes formules, à la place de P et p , les valeurs trouvées pour P' et p' , on obtiendra les nombres qui mesurent les contours des polygones réguliers circonscrit et inscrit de 24 côtés, et ainsi de

suite; mais, lorsque le nombre des côtés de deux polygones semblables augmente ainsi par duplication, la différence de leurs périmètres diminue et l'on peut pousser le calcul assez loin pour que cette différence soit moindre qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra (th. 9); d'ailleurs, la longueur de la circonférence, ou le nombre π , est constamment comprise entre P et p , entre P' et p' , etc. (th. 10 et 11); donc si l'on continue les opérations jusqu'à ce que l'on trouve deux polygones dont les périmètres, exprimés en décimales, aient le même chiffre des dixièmes, et qu'on néglige toutes les décimales ultérieures, on aura la valeur de π , approchée par défaut, à moins d'un dixième.

On obtiendra, par le même procédé, la valeur de π approchée par défaut, à moins d'un centième, à moins d'un millième et, en général, à moins d'une unité décimale aussi petite qu'on voudra.

REMARQUE 1. Archimède a prouvé que le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre $3\frac{1}{70}$ et $3\frac{1}{71}$ ou entre $3\frac{1}{497}$ et $3\frac{20}{497}$; donc $3\frac{1}{7}$, ou $\frac{22}{7}$, est la valeur de π , approchée par excès, à moins de $\frac{1}{497}$.

Adrien Metius a trouvé la valeur plus approchée $\frac{355}{113}$.

REMARQUE 2. La valeur de π , approchée par défaut, à moins d'un dix-billionième, est 3,1415926535. Il en résulte que $\frac{22}{7}$ est une valeur de π , approchée par excès, à moins de $\frac{1}{790}$ et que $\frac{355}{113}$ est une valeur de π , approchée par excès, à moins d'un millionième.



GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

LIVRE I.

LE PLAN.

DÉFINITIONS.

1. L'ouverture de deux plans qui se rencontrent s'appelle *angle dièdre*.

2. Ces plans sont les *faces* de l'angle dièdre.

3. L'*arête* d'un angle dièdre est la droite suivant laquelle les faces se rencontrent.

REMARQUE. L'angle dièdre se désigne par les lettres AB de l'arête ou par les quatre lettres MABN de ses faces, en mettant celles de l'arête au milieu.



4. L'angle *correspondant* à un angle dièdre est l'angle plan formé par les perpendiculaires menées en un même point de l'arête dans chacune des faces.

5. Deux angles dièdres *coïncident*, quand ils ont la même arête et que leurs faces coïncident.

6. Deux angles dièdres susceptibles de coïncider sont *égaux*.

7. Deux angles dièdres sont *adjacents*, lorsque, ayant la même arête et une face commune, ils sont extérieurs l'un à l'autre.

8. Deux angles dièdres sont *opposés à l'arête*, quand cha-

cun d'eux est formé par les prolongements des faces de l'autre.

9. Un plan est *perpendiculaire* à un autre, quand le premier fait avec le second, et d'un même côté de celui-ci, deux angles égaux entre eux.

10. Un plan est *oblique* sur un autre, quand le premier fait avec le second, et d'un même côté de celui-ci, deux angles inégaux.

11. On nomme angle dièdre *droit* chacun des deux angles adjacents, égaux entre eux, que forment deux plans dont l'un est perpendiculaire à l'autre.

12. Tout angle dièdre, plus petit qu'un angle dièdre droit, est un angle *aigu*.

13. Tout angle dièdre, plus grand qu'un angle dièdre droit, est un angle *obtus*.

14. Deux angles dièdres sont *complémentaires*, *supplémentaires*, *alternes-internes*, *correspondants* ou *alternes-externes*, dans les mêmes cas que deux angles plans (g. pl. liv. I, déf. 14, 15 et 16).

15. Une ligne droite et un plan sont *perpendiculaires*, l'un à l'autre, lorsque la droite est perpendiculaire à toutes celles qui passent par son *pied* dans le plan.

16. Une ligne droite et un plan sont *obliques*, l'un à l'autre, lorsque la droite n'est pas perpendiculaire à toutes celles qui passent par son *pied* dans le plan.

17. L'*angle* d'une ligne droite et d'un plan est le plus petit des angles que fait cette droite avec celles qui passent par son pied dans le plan.

18. Deux plans, ou une droite et un plan, qui ne se rencontrent pas, sont *parallèles*.

THÉORÈME PREMIER.

Deux plans différents MN, PQ, qui ont un point

commun A, se coupent mutuellement suivant une droite qui passe par ce point.



Au point A, menons, dans le plan MN, deux droites AB, AC, d'un même côté du plan PQ; et joignons un point C de AC à un point D du prolongement de AB, situé de l'autre côté de PQ par rapport au point C (ax. 7). La droite CD sera tout entière dans le plan MN (princ. déf. 13) et rencontrera PQ en un point E (ax. 9); donc la droite AE est tout entière dans chacun des deux plans; donc ils se coupent mutuellement suivant cette droite.

De plus, la ligne AE contient tous les points communs aux deux plans; car s'ils avaient un point commun situé hors de cette droite, ils coïncideraient dans toute leur étendue et ne formeraient qu'un seul plan (princ. th. 2, rem.), ce qui est contre la supposition.

THÉORÈME 11.

Toute droite AD menée par un point A pris dans un plan MN, parallèlement à une droite BC tracée dans le plan, est située tout entière dans ce même plan.



Car le plan MN et celui des deux parallèles AD, BC, ayant la droite BC commune et le point commun A, situé hors de cette droite, ne forment qu'un seul et même plan (princ. th. 2, rem.); donc AD est tout entière dans le plan MN.

COROLLAIRE. *Par un point A, pris hors d'une droite BC, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite. Car supposons qu'on puisse en mener deux, l'une AD et l'autre*

AK. En vertu de ce qui précède, le plan MN des deux parallèles AD , BC contiendrait AK tout entière; donc par un même point A , et dans un même plan, on pourrait mener deux parallèles à une même droite BC , ce qui est impossible.

THÉORÈME 111.

Lorsque deux plans AC , MN se coupent, toute droite AD , menée dans l'un des plans parallèlement à leur intersection BC , est parallèle à l'autre; et réciproquement, toute droite AD , menée dans l'un des plans parallèlement à l'autre, est parallèle à leur intersection.



1° Car, si la droite AD , située tout entière dans le plan AC , rencontrait le plan MN , ce serait en un point de l'intersection BC , ce qui est impossible, puisqu'on suppose AD parallèle à BC ; donc AD ne peut rencontrer le plan MN ; donc elle est parallèle à ce plan.

2° Car si les deux droites AD , BC , qui sont situées dans un même plan AC , n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient, et, par suite, AD rencontrerait le plan MN , ce qui est impossible, puisqu'on la suppose parallèle à ce plan; donc AD est parallèle à BC .

COROLLAIRE 1. *Lorsque, suivant une droite AD , parallèle à un plan MN , on conduit un plan $ABCD$ qui coupe le premier, l'intersection BC est parallèle à la droite proposée.*

COROLLAIRE 2. *Lorsqu'une droite AD est parallèle à un plan MN , si, par un point B du plan, on mène une parallèle à la droite, cette parallèle sera située tout entière dans le plan. Car, supposons qu'elle prenne une direction BK hors du plan MN , le plan des deux droites AD , BK couperait le plan MN suivant une droite BC différente de BK et paral-*

lèle à AD (cor. 1) ; donc on pourrait mener par un même point B deux parallèles à une même droite AD , ce qui est impossible.

COROLLAIRE 3. *Lorsqu'une droite AB rencontre un plan MN , toute droite CD , parallèle à la première, rencontre ce plan.* Car, si CD était parallèle au plan MN , la droite AB serait située tout entière dans ce plan (cor. 2), ce qui est contre la supposition.

COROLLAIRE 4. *Toute droite, parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.* Car si, par un point de l'intersection, on mène une parallèle à la droite proposée, cette parallèle sera située tout entière dans chacun des deux plans (cor. 2), et, par suite, se confondra avec leur intersection.

THÉORÈME IV.

Les intersections AB , CD de deux plans parallèles MN , PQ , coupés par un troisième RS , sont parallèles.

Car, si les droites AB , CD , situées dans un même plan RS , n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient ; donc les deux plans MN , PQ se rencontreraient aussi, ce qui est contre la supposition.

COROLLAIRE 1. *Lorsque deux plans MN , PQ sont parallèles, si, par un point A de l'un on mène une parallèle à l'autre, elle sera située tout entière dans le premier plan.* Car, supposons que cette parallèle prenne une direction AK hors du plan MN ; et menons, par la droite AK , un plan RS qui coupe MN suivant AB et PQ suivant CD : les intersections AB , CD seraient parallèles, ainsi que les deux lignes AK , CD (3, cor. 1) ;



donc, par un même point A, on pourrait mener deux parallèles à une même droite CD, ce qui est impossible.

COROLLAIRE 2. *Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite, qui rencontre l'un d'eux, rencontre aussi l'autre. Car si cette droite était parallèle au second plan, elle serait tout entière dans le premier (cor. 1), ce qui est contre la supposition.*

THÉORÈME V.

Deux droites AB, CD, parallèles à une troisième EF, sont parallèles entre elles.



Par la droite AB et un point C de la droite CD, menons un plan BAC qui coupe celui des deux parallèles AB, EF suivant AB. La droite EF, parallèle à l'intersection AB, est aussi parallèle au plan BAC (3); donc la droite CD, menée par le point C parallèlement à EF, est tout entière dans ce plan (3, cor. 2); donc les deux droites AB, CD sont dans un même plan; de plus, elles ne peuvent se rencontrer; car si cela avait lieu, elles seraient menées d'un même point parallèlement à une même droite EF, ce qui est impossible (2, cor.); donc elles sont parallèles.

THÉORÈME VI.

Lorsque deux angles BAC, DEF, non situés dans le même plan, ont les côtés parallèles chacun à chacun : 1° leurs plans sont parallèles; 2° les deux angles sont égaux ou supplémentaires.



1° La droite AB , parallèle à ED , est parallèle au plan DEF (3); la droite AC , parallèle à EF , est aussi parallèle à ce plan; donc, si le plan BAC rencontrait le plan DEF , les deux droites AB , AC seraient parallèles à l'intersection (3, cor. 1), ce qui est impossible; donc ces deux plans sont parallèles.

2° Prenons $AB = ED$, $AC = EF$, et menons BC , DF , AE , BD , CF .

Puisque AB est égale et parallèle à ED , BD est égale et parallèle à AE (g. pl. liv. II, 18); par la même raison, CF est égale et parallèle à AE ; donc BD est égale et parallèle à CF (5) et, par suite, $BC = DF$; donc les triangles ABC , DEF ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle $BAC = DEF$.

REMARQUE. L'égalité des deux angles aurait encore lieu, s'ils avaient leurs côtés parallèles dirigés en sens contraire; mais, si deux côtés parallèles étaient dirigés dans le même sens et les deux autres en sens contraire, les angles proposés seraient supplémentaires.

THÉORÈME VII.

Par un point A , pris hors d'un plan MN , on peut mener un plan parallèle au premier, mais on n'en peut mener qu'un seul.

1° Par un point B du plan MN , traçons, dans ce plan, deux droites BC , BD ; menons AE parallèle à BC et AF parallèle à BD : le plan PQ des deux droites AE , AF est le plan demandé. En effet, les deux angles CBD , EAF ont les côtés parallèles, chacun à chacun; donc leurs plans sont parallèles (6).



2° Car, supposons qu'on puisse faire passer, par le point



A, deux plans BP, CQ parallèles à MN; si l'on conçoit un plan qui coupe les plans MN, BP, CQ suivant les droites DE, AF, AG, les deux droites AF, DE seraient parallèles, comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième (*4*); par la même raison, AG serait parallèle à DE; donc il y aurait deux droites menées d'un même point A parallèlement à DE, ce qui est impossible.

COROLLAIRE 1. *Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui rencontre l'un d'eux rencontre l'autre.*

COROLLAIRE 2. *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux.* Car, s'ils se rencontraient, on pourrait mener, par un même point de leur intersection, deux plans parallèles à un troisième.

THÉORÈME VIII.

Par un point O, pris sur une droite AB, 1° on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite; 2° on n'en peut mener qu'un seul.



1° Menons deux plans par la droite AB, et, dans ces plans, élevons sur AB les perpendiculaires OC, OD; le plan MN conduit suivant OC et OD sera perpendiculaire à la droite AB.

Il s'agit de prouver que toute autre droite OE, menée par le point O, dans le plan MN, est perpendiculaire sur AB (déf. 15). Pour cela, menons la droite CD qui rencontre les trois lignes OC, OD, OE aux points C, D, E; prenons, de part et d'autre du point O, dans la

direction AB , deux quantités OA , OB égales entre elles, et menons AC , AD , AE , BC , BD , BE . Les deux droites OC , OD étant perpendiculaires au milieu de AB , on a $CA = CB$ et $DA = DB$; donc les triangles ACD , BCD ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et, par suite, l'angle $ACD = BCD$; donc les triangles ACE , BCE ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc $AE = BE$; donc, dans le triangle isocèle EAB , la droite EO , menée du sommet au milieu de la base AB , est perpendiculaire à cette base.



2° Car, supposons qu'on puisse mener par le point O deux plans CDM , CDN perpendiculaires sur AB . Si l'on conduit, par la ligne AB , un plan qui coupe les deux premiers suivant des droites OE , OF différentes de CD , les deux

plans CDM , CDN étant perpendiculaires sur AB , les lignes OE , OF seraient toutes deux perpendiculaires à AB ; donc par un même point O , et dans un même plan, on pourrait mener deux perpendiculaires OE , OF à une même droite AB , ce qui est impossible.

COROLLAIRE 1. Toute droite, perpendiculaire à deux autres droites qui passent par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.

COROLLAIRE 2. Si, par le pied d'une perpendiculaire AB à un plan MN , on mène une perpendiculaire à cette droite, elle sera située tout entière dans le plan.



Car, supposons que cette perpendiculaire prenne une direction OK hors du plan MN ; et menons, par les deux droites AB , OK , un plan qui coupe MN suivant OC . La droite AB , perpendiculaire au plan MN , serait perpendiculaire à OC qui passe par son pied dans le plan; donc, au même point O , et dans un même plan, on pourrait élever deux perpendiculaires OK , OC à la droite AB , ce qui est impossible.

THÉORÈME IX.

Par un point O , pris hors d'une droite AB , 1° on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite ; 2° on n'en peut mener qu'un seul.



1° Du point O , abaissons la perpendiculaire OC sur AB ; et, au point C , menons le plan MN perpendiculaire à AB (8). Ce plan contiendra la droite OC (8, cor. 2), et sera le plan demandé.

2° Car, si l'on pouvait mener par le point O deux plans MN , MP perpendiculaires sur AB aux points C et D , les droites OC , OD seraient deux perpendiculaires abaissées d'un même point O sur la droite AB , ce qui est impossible.

COROLLAIRE 1. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Car, s'ils se rencontraient, on pourrait mener, par un même point de leur intersection, deux plans perpendiculaires à cette droite, ce qui est impossible.

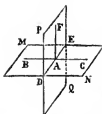
COROLLAIRE 2. Un plan MN et une droite AB , perpendiculaires à une même droite CD en des points différents E et F , sont parallèles.



Car le plan, mené au point F perpendiculairement à CD (8), contiendra la droite AB (8, cor. 2) et sera parallèle au plan MN (cor. 1).

THÉORÈME X.

Par un point A , situé dans un plan MN , 1° on peut mener une perpendiculaire à ce plan ; 2° on n'en peut mener qu'une.



1° Par le point A, menons la droite BC dans le plan MN, et le plan PQ perpendiculaire à BC; la droite AF, menée dans le plan PQ perpendiculairement à l'intersection DE des deux plans, est perpendiculaire au plan MN. En effet, puisque le plan PQ est perpendiculaire à BC, la droite AF, menée par le pied de BC dans ce plan, est perpendiculaire à BC; d'ailleurs AF est, par construction, perpendiculaire à DE; donc elle est perpendiculaire au plan MN (8, cor. 1).

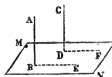
2° Soit la droite AB perpendiculaire au plan MN; je dis que toute autre droite AC, qui rencontre le plan MN, est oblique à ce plan. En effet, le plan BAC coupe le plan MN suivant une droite AD (1), et la droite AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire sur AD; donc AC est oblique sur AD (g. pl.

liv. I, 1) et, par suite, au plan MN.



THÉORÈME XI.

Lorsqu'une droite AB est perpendiculaire à un plan MN, toute autre droite CD, parallèle à la première, est perpendiculaire au même plan.

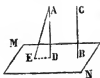


Par les points B et D, où les droites AB, CD rencontrent le plan MN (3, cor. 3), menons, dans ce plan, deux droites quelconques BE, DF, parallèles et dirigées dans le même sens. Les angles ABE, CDF, ayant les côtés parallèles, chacun à chacun, et dirigés dans le même sens, sont égaux entre eux (6); mais l'angle ABE est

droit, puisque AB est perpendiculaire au plan MN , donc CDF est aussi un angle droit ; donc CD est perpendiculaire à une droite quelconque DF , menée par son pied dans le plan MN ; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME XII.

Par un point A , situé hors d'un plan MN , 1° on peut mener une perpendiculaire à ce plan ; 2° on n'en peut mener qu'une.



1° Par un point B , pris dans le plan MN , menons BC perpendiculaire à ce plan (10) ; la droite AD , parallèle à BC , est perpendiculaire au plan MN (11).

2° AD étant perpendiculaire au plan MN , je dis que toute autre droite AE , qui rencontre le plan MN , est oblique à ce plan. En effet, le plan DAE coupe le plan MN suivant une droite DE , et la droite AD , perpendiculaire au plan MN , est perpendiculaire à DE ; donc AE est oblique à DE (g. pl. liv. 1, 11) et, par suite, au plan MN .

THÉORÈME XIII.

Deux droites AB , CD , perpendiculaires à un même plan MN , sont parallèles.



Car si, par un point de CD , on mène une parallèle à AB , cette parallèle sera perpendiculaire au plan MN (11) et, par suite, se confondra avec CD (10 et 12) ; donc CD est parallèle à AB .

THÉORÈME XIV.

Lorsque, du pied d'une perpendiculaire AP à un plan MN , on abaisse une perpendiculaire PD sur une droite BC , située dans ce plan, et qu'on joint le pied de cette perpendiculaire à un point A de la perpendiculaire au plan, la droite AD , qui en résulte, est perpendiculaire à la droite BC , située dans ce plan.



La droite AP étant perpendiculaire au plan MN , la droite DE , parallèle à AP , est perpendiculaire à ce plan (11) et, par suite, à la droite BC ; donc BC est perpendiculaire aux deux droites DP , DE , menées par son pied dans le plan $APDE$, donc elle est perpendiculaire à ce plan et, par suite, à la droite AD .

THÉORÈME XV.

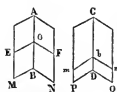
Lorsque deux plans MN , PQ sont parallèles, toute droite AB , perpendiculaire au premier, est perpendiculaire à l'autre.



Par le point B , où la droite AB rencontre le plan PQ (4, cor. 2), traçons, dans ce plan, une droite quelconque BC , puis menons le plan ABC qui coupe MN suivant AD parallèle à BC (4). La droite AB , perpendiculaire à MN , est perpendiculaire sur AD et, par suite, sur BC ; or, BC est une droite quelconque menée par le pied de AB dans le plan PQ , donc AB est perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME XVI.

A des angles dièdres égaux AB , CD correspondent des angles plans MBN , PDQ égaux entre eux ; et réciproquement.



Prouvons d'abord que l'angle plan MBN , correspondant à un angle dièdre AB (déf. 4), est le même, quel que soit son sommet sur l'arête AB , c'est-à-dire que, si, par un autre point O de l'arête, on mène OE dans la face AM et OF dans la face AN , perpendiculaires sur AB , on aura l'angle $EOF = MBN$.

En effet, les deux droites OE , BM , perpendiculaires à une même droite AB , dans un même plan ABM , sont parallèles; par la même raison, la droite OF est parallèle à BN ; donc l'angle $EOF = MBN$ (6).

1° Cela étant, faisons coïncider les deux angles AB , CD , et supposons que l'angle MBN , correspondant au premier, prenne la position mbn relative au second. En vertu de ce qui précède, l'angle $mbn = PDQ$; donc $MBN = PDQ$.

2° Réciproquement, lorsque les angles plans MBN , PDQ , correspondants à deux angles dièdres AB , CD , sont égaux, les angles dièdres sont aussi égaux entre eux.

En effet, la droite AB , perpendiculaire aux deux droites BM , BN , menées par son pied dans le plan MBN , est perpendiculaire à ce plan; par la même raison, la droite CD est perpendiculaire au plan PDQ . Cela étant, si l'on place la première figure sur la seconde, de manière que l'angle MBN coïncide avec PDQ , la droite BA prendra la direction DC (10); donc la face ABM coïncidera avec la face CDP (princ. 3), la face ABN avec la face CDQ , et l'angle dièdre AB avec l'angle dièdre CD ; donc ces angles dièdres sont égaux.

THÉORÈME XVII.

A un plus grand angle dièdre correspond un plus grand angle plan; et réciproquement.



1° Soit l'angle dièdre $MABN > PCDQ$; l'angle plan MBN , correspondant au premier, sera plus grand que l'angle plan PDQ correspondant au second.

En effet, concevons, dans l'angle dièdre $MABN$, un angle $MABS = PCDQ$; le plan de la face ABS coupera celui de l'angle MBN suivant une droite BS perpendiculaire à AB , et on aura $MBS = PDQ$ (16); or $MBN > MBS$, donc $MBN > PDQ$.

2° Soit l'angle plan $MBN > PDQ$; l'angle dièdre $MABN$ sera plus grand que $PCDQ$.

Car, si l'on conçoit, dans l'angle MBN , un angle $MBS = PDQ$, et qu'on mène un plan par les deux droites AB , BS , on aura l'angle dièdre $MABS = PCDQ$ (16); or $MABN > MABS$, donc $MABN > PCDQ$.

THÉORÈME XVIII.

Lorsqu'une droite AP est perpendiculaire à un plan MN , tout plan ABC , conduit suivant cette droite, est perpendiculaire au même plan.



Par le point P , menons, dans le plan MN , la droite DE perpendiculaire à l'intersection BC . La droite AP , perpendiculaire à MN , est perpendiculaire à chacune des deux droites BC , DE qui passent par son pied dans le plan; donc l'angle plan $APD = APE$;

donc les angles dièdres $ABCN$, $ABCM$, correspondants à ces angles, sont égaux entre eux (16) ou, autrement, le plan ABC est perpendiculaire au plan MN (déf. 9).

COROLLAIRE 1. *Lorsque trois droites PA , PB , PD , qui se rencontrent en un même point, sont perpendiculaires entre elles, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres, et les trois plans APB , APD , BPD , menés par ces droites, sont perpendiculaires entre eux.*

COROLLAIRE 2. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan parallèle à cette droite est perpendiculaire au premier; car si, par un point du second plan, on mène une parallèle à la droite proposée, cette parallèle sera située tout entière dans ce plan (3, cor. 2) et, de plus, perpendiculaire au premier (11).*

THÉORÈME XIX.

Lorsqu'un plan ABC est perpendiculaire à un autre plan MN , toute droite AP , tracée dans le premier perpendiculairement à l'intersection BC , est perpendiculaire au second.



Par le point P , menons, dans le plan MN , la droite DE perpendiculaire à BC . Les angles dièdres $ABCM$, $ABCN$ étant égaux par hypothèse, les angles plans APE , APD , qui leur correspondent, sont aussi égaux entre eux (16); donc la droite AP est perpendiculaire aux deux droites BC , DE menées par son pied dans le plan MN ; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

COROLLAIRE 1. *L'angle plan APD , correspondant à un angle dièdre droit $ABCN$, est un angle droit; or tous les angles plans droits sont égaux entre eux (g. pl. liv. 1, 2), donc tous les angles dièdres droits sont égaux entre eux (16).*

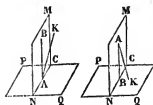
COROLLAIRE 2. On a prouvé qu'à un plus grand angle

dièdre correspond un plus grand angle plan (17); donc *selon qu'un angle dièdre est aigu ou obtus, l'angle plan qui lui correspond est aigu ou obtus.*

COROLLAIRE 3. La ligne DE, perpendiculaire aux deux droites AP, BC, est perpendiculaire au plan ABC (8, cor. 1); donc le plan MN, conduit suivant DE, est aussi perpendiculaire au plan ABC (18); donc *lorsqu'un plan est perpendiculaire à un autre, réciproquement, celui-ci est perpendiculaire au premier.*

THÉORÈME XX.

Lorsque deux plans MN, PQ sont perpendiculaires entre eux, et que, par un point A pris sur l'un d'eux, on mène une perpendiculaire à l'autre, cette droite est située tout entière dans le premier plan.



Car, supposons que la perpendiculaire, menée par le point A du plan MN au plan PQ, prenne une direction AK hors du plan MN; si l'on mène, dans ce plan, la droite AB perpendiculaire à l'intersection CN, cette droite sera perpendiculaire à PQ (19); donc, par un même point A, on pourrait mener deux perpendiculaires AK, AB à un même plan PQ, ce qui est impossible (10 et 12).

COROLLAIRE. *Lorsque deux plans P et Q sont parallèles, tout plan R, perpendiculaire au premier, est perpendiculaire à l'autre.* Car si, par un point du plan R, on mène une perpendiculaire au plan P, elle sera tout entière dans le plan R et, de plus, perpendiculaire au plan Q (15); donc le plan R, conduit suivant cette droite, est perpendiculaire au plan Q (18).

THÉORÈME XXI.

Tout plan MN perpendiculaire à deux plans PQ, RS, qui se rencontrent, est perpendiculaire à leur intersection AB.



Car si, par un point de AB, on mène une perpendiculaire au plan MN, elle sera située tout entière dans chacun des deux plans PQ, RS (20); donc elle coïncidera avec leur intersection; donc AB est perpendiculaire au plan MN.

THÉORÈME XXII.

Par une droite AB, non perpendiculaire à un plan MN, on peut mener un plan perpendiculaire au premier, mais on n'en peut mener qu'un seul.



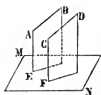
1° Par un point A de AB, menons une perpendiculaire AP au plan MN : le plan ABP, conduit suivant les deux droites AB, AP, sera perpendiculaire au plan MN (18).

2° Car s'il était possible de mener, par la droite AB, deux plans ABP, ABQ perpendiculaires à MN, leur intersection AB serait perpendiculaire à ce plan (21), ce qui est contre la supposition.

THÉORÈME XXIII.

Lorsque deux droites parallèles AB, CD ne sont pas

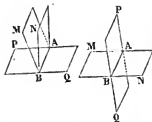
perpendiculaires à un plan MN, et que l'on conduit, suivant chacune de ces droites, un plan perpendiculaire au premier, ces deux plans sont parallèles.



Par les points A et C, pris comme on voudra sur les droites AB, CD, menons les perpendiculaires AE, CF au plan MN. Les plans BAE, DCF sont perpendiculaires au plan MN (22); de plus, les droites AE, CF sont parallèles (13); donc les angles BAE, DCF ont les côtés parallèles chacun à chacun; donc leurs plans sont parallèles (6).

THÉORÈME XXIV.

Tout plan MAB, qui en rencontre un autre PQ, fait avec celui-ci deux angles adjacents MABP, MABQ dont la somme est égale à deux angles droits.



Suivant la droite AB, menons un plan NAB perpendiculaire à PQ (22). La somme des angles MABP, MABQ se compose des trois angles NABQ, NABM, MABP: le premier NABQ est droit; les deux autres, pris ensemble, donnent l'angle droit NABP; donc la somme des deux angles MABP, MABQ est égale à deux angles droits.

COROLLAIRE 1. *Réciproquement, lorsque deux angles adjacents MABP, NABP sont supplémentaires, les faces extrêmes MAB, NAB sont dans un même plan. Car, en supposant que la face NAB ne soit pas le prolongement de la*

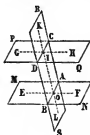
face MAB, on prouverait, comme dans la démonstration du théorème IV (g. pl. liv. I), que l'angle dièdre NABP a le même supplément MABP qu'un autre angle dièdre plus petit ou plus grand que NABP, ce qui est absurde.

COROLLAIRE 2. Deux angles dièdres MABP, NABQ, opposés à l'arête, sont égaux. Car ils ont le même supplément NABP.

THÉORÈME XXV.

Lorsque deux plans parallèles MN, PQ sont coupés par un troisième RS : 1° deux angles quelconques alternes-internes, correspondants ou alternes-externes sont égaux entre eux ; 2° la somme de deux angles intérieurs d'un même côté du plan sécant est égale à deux angles droits.

1° Menons un plan perpendiculaire aux intersections parallèles AB, CD (11) ; et soient EF, GH, LK les droites suivant lesquelles ce plan coupe les trois premiers.



Les intersections EF, GH étant parallèles (4), les angles plans EOK, LIH sont égaux comme alternes-internes ; donc les angles dièdres alternes-internes MABR, QCDS, qui correspondent à ces angles plans, sont aussi égaux entre eux (16). On prouverait de même l'égalité de deux angles dièdres correspondants ou alternes-externes.

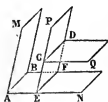
2° La somme des angles dièdres adjacents PCDS, QCDS étant égale à deux droits (24), si l'on remplace QCDS par MABR, on aura PCDS + MABR = deux droits.

REMARQUE. Les réciproques sont vraies, lorsqu'on suppose, outre l'égalité des angles dièdres, le parallélisme des

intersections AB , CD des deux premiers plans par le troisième. Car si l'on mène, comme précédemment, un plan perpendiculaire à ces deux parallèles, on conclura, par exemple, de l'égalité des deux angles alternes-internes $MABR$, $QCDS$ celle des angles plans EOK , LIH (16), et, par suite, le parallélisme des droites EF , GH (g. pl. liv. 1, 8) : donc alors les deux angles AOE , CIH ont les côtés parallèles chacun à chacun; donc leurs plans MN , PQ sont parallèles (6).

THÉORÈME XXVI.

Deux angles dièdres $MABN$, $PCDQ$, dont les faces ABM et CDP , ABN et CDQ sont parallèles chacune à chacune, ont leurs arêtes parallèles, et sont égaux ou supplémentaires.



1° La face CDP , prolongée si cela est nécessaire, rencontre la face ABN suivant une droite EF (7, cor. 1) qui est parallèle à AB (4); par la même raison, CD est parallèle à EF ; donc AB et CD sont parallèles entre elles (5).

2° Puisque la face ABM est parallèle à CDP , les angles correspondants $MABN$, $PEFN$ sont égaux (25); de même, puisque la face ABN est parallèle à CDQ , l'angle dièdre $PCDQ = PEFN$; donc $MABN = PCDQ$.

REMARQUE. L'égalité des deux angles aurait encore lieu, s'ils avaient leurs faces parallèles dirigées en sens contraire; mais si deux faces parallèles étaient dirigées dans le même sens, et les deux autres en sens contraire, les angles proposés seraient supplémentaires.

THÉORÈME XXVII.

Lorsque par un point O , situé comme on voudra, on mène des perpendiculaires OC , OD aux faces d'un angle dièdre $MABN$, l'angle COD de ces perpendiculaires et l'angle plan correspondant à l'angle dièdre sont égaux ou supplémentaires.

Le plan COD , conduit suivant les perpendiculaires OC , OD , est perpendiculaire aux deux plans ABM , ABN et, par suite, à leur intersection AB , qu'il rencontre en un point E ; donc CED est l'angle plan correspondant à l'angle dièdre $MABN$ (déf. 4). Mais la droite OC , perpendiculaire au plan ABM , est perpendiculaire à CE ; la droite OD , perpendiculaire au plan ABN , est perpendiculaire à DE ; donc les angles COD , CED sont égaux ou supplémentaires (g. pl. liv. 1, 19).

COROLLAIRE 1. Lorsque d'un point O , pris dans un angle dièdre $MABN$, on abaisse une perpendiculaire sur le plan de chaque face, l'angle COD de ces perpendiculaires est le supplément de l'angle plan CED correspondant à l'angle dièdre. Car l'angle COD est formé par les perpendiculaires abaissées d'un point O , pris dans l'angle plan CED , sur les côtés de cet angle (g. pl. liv. 1, 19).

COROLLAIRE 2. Lorsque, en un point O de l'arête d'un angle dièdre AB , on élève, sur la face ABM , une perpendiculaire OC , du même côté du plan ABM que la face ABN , et, sur la face ABN , une perpendiculaire OD , du même côté du plan ABN que la face ABM , l'angle COD est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre. Car, OE , OF étant les intersections des faces ABM , ABN par



le plan COD, l'angle EOF correspond à l'angle dièdre AB; de plus, la droite OC, perpendiculaire sur OE, est située du même côté de OE que OF, et la droite OD, perpendiculaire sur OF, est située du même côté de OF que OE; donc les angles EOF, COD sont supplémentaires (g. pl. liv. 1, 7, 3°).

Il en serait de même, si les côtés de l'angle COD étaient dirigés en sens contraire (g. pl. liv. 1, 7, 2°).

THÉORÈME XXVIII.

La distance d'un point A à un plan MN est la perpendiculaire AP, abaissée de ce point sur le plan.



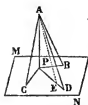
Menons l'oblique AB au plan MN, et joignons le point B au point P. Dans le triangle rectangle ABP, la perpendiculaire AP, à BP, est plus courte que l'oblique AB (g. pl. liv. 11, 27); donc AP est la distance du point A au plan MN.

REMARQUE. Soit BD une autre droite quelconque, menée par le pied de l'oblique AB dans le plan MN. Prenons $BD = BP$ et menons AD: les triangles ABP, ABD ont le côté AB commun, le côté $BP = BD$ et $AP < AD$; donc on a l'angle $ABP < ABD$; donc ABP est l'angle de l'oblique AB et du plan MN (déf. 17).

THÉORÈME XXIX.

Lorsque d'un point A, situé hors d'un plan MN, on mène une perpendiculaire AP à ce plan, et différentes obliques AB, AC, AD, etc., 1° deux obliques AB, AC, dont les pieds s'écartent également de la perpendiculaire AP, sont égales entre elles; 2° de deux obli-

ques AB , AD , celle dont le pied s'écarte le moins de la perpendiculaire est la plus courte.



1° On a, par hypothèse, $PB = PC$; donc les triangles rectangles APB , APC ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, donc $AB = AC$.

2° Soit $PB < PD$. Prenons, sur PD , la ligne $PE = PB$ et menons AE . En vertu de ce qui précède, l'oblique $AE = AB$; mais, dans le plan APD , on a l'oblique $AE < AD$; donc $AB < AD$.

COROLLAIRE. Lorsque deux obliques sont égales, leurs pieds s'écartent également de la perpendiculaire AP , et lorsque deux obliques sont inégales, le pied de la plus courte s'écarte le moins de la perpendiculaire.

THÉORÈME XXX.

Les parallèles AB , CD , comprises entre deux plans parallèles MN , PQ , sont égales.



En effet, les intersections AC , BD des plans MN , PQ par le plan $ABDC$ sont parallèles; donc la figure $ABDC$ est un parallélogramme; donc $AB = CD$.

RÉCIPROQUEMENT, deux plans MN , PQ , qui comprennent trois droites AB , CD , EF , égales, parallèles et non situées dans un même plan, sont parallèles. Car, puisque AB est égale et parallèle à CD , les côtés opposés AC , BD sont parallèles (g. pl. liv. II, 18); par une raison semblable, AE est parallèle à BF ; donc les angles CAE , DBF ont les côtés parallèles chacun à chacun; donc leurs plans MN , PQ sont parallèles (6).

COROLLAIRE 1. Deux plans parallèles MN , PQ sont par-

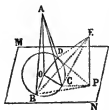
tout également distants. Car les perpendiculaires AB , CD , communes à ces plans (15), sont parallèles (13); donc elles sont égales comme parallèles comprises entre plans parallèles.

COROLLAIRE 2. *Tout plan MN , qui a trois points A , C , E , non en ligne droite, situés d'un même côté d'un autre plan PQ et à égale distance de ce plan, lui est parallèle.* En effet, les perpendiculaires AB , CD , EF , abaissées de ces points sur le plan PQ , sont trois droites égales, parallèles, et non situées dans un même plan; donc les deux plans MN , PQ sont parallèles.

REMARQUE. On prouverait de même que *deux parallèles, comprises entre un plan et une droite parallèles, sont égales; et qu'une droite parallèle à un plan, a tous ses points également distants de ce plan.*

THÉORÈME XXXI.

La perpendiculaire OA , menée par le centre d'un cercle à son plan MN , est le lieu géométrique des points également distants de tous ceux de la circonférence.



1° D'un même point A , pris sur la droite OA , menons les droites AB , AC , AD ... à la circonférence. Toutes ces obliques ont leurs pieds également éloignés de la perpendiculaire OA ; donc elles sont égales (29).

2° D'un point E , pris hors de la ligne OA , menons les droites EB , EC , ED , à trois points B , C , D de la circonférence; abaissons la perpendiculaire EP sur le plan MN , et menons PB , PC , PD . Le point P n'étant pas le centre du cercle, on n'a pas à la fois $PB = PC = PD$ (g. pl. liv. III, 2); donc les trois obliques EB , EC , ED ne sont pas égales entre elles (29).

COROLLAIRE 1. *Toute droite qui a deux points, situés chacun à égale distance de trois points de la circonférence d'un cercle, coïncide avec la perpendiculaire, menée par le centre du cercle, à son plan.*

COROLLAIRE 2. Donc, si l'on prend, dans un plan MN , trois points B, C, D également distants d'un point A , donné hors du plan, et qu'on joigne le point A au centre O de la circonférence qui passe par ces trois points, la droite AO sera la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan MN (cor. 1).

COROLLAIRE 3. *Toute droite AO , qui fait des angles égaux avec trois droites OB, OC, OD menées par son pied dans un plan MN , est perpendiculaire à ce plan.* Car, si l'on prend $OB=OC=OD$, et qu'on mène AB, AC, AD , les triangles AOB, AOC, AOD auront un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc $AB=AC=AD$; donc AO est perpendiculaire au plan MN (cor. 2).

THÉORÈME XXXII.

Le plan MN , perpendiculaire au milieu d'une droite AB , est le lieu géométrique des points également distants des extrémités de cette droite.



1° Soit le point C , pris dans le plan MN . Par ce point et la ligne AB menons un plan qui coupe MN suivant OC . La droite OC , menée par le pied de AB dans le plan MN , est perpendiculaire au milieu de AB ; donc $CA=CB$.

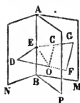
2° Soit le point D , pris hors du plan MN . Le plan, mené par ce point et la ligne AB , coupe MN suivant une droite OC perpendiculaire au milieu de AB , et le point D est situé hors de cette droite; donc on a $DB < DA$.

COROLLAIRE. *Tout plan, qui a trois points, non en ligne*

droite, situés chacun à égale distance des extrémités d'une droite, est perpendiculaire au milieu de cette droite.

THÉORÈME XXXIII.

Le plan ABP, bissecteur d'un angle dièdre MABN, est le lieu géométrique des points situés dans l'angle à égale distance de ses faces.



1° D'un point O, pris dans le plan ABP, abaissons les perpendiculaires OC, OD sur les faces ABM, ABN. Le plan COD sera perpendiculaire à chacun des plans MAB, NAB (18) et, par suite, à leur intersection AB (21), qu'il rencontre en un point E; donc les droites EC, ED, EO sont perpendiculaires sur AB; donc OEC, OED sont les angles plans correspondants aux angles dièdres MABP, NABP (déf. 4); mais on a, par hypothèse, $MABP = NABP$; donc $OEC = OED$ et la droite OE est la bissectrice de l'angle CED; donc $OC = OD$ (g. pl. liv. II, 31).

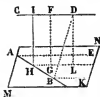
2° D'un point F, pris hors du plan ABP, menons les perpendiculaires FG, FD aux plans ABM, ABN. Le plan GFD coupe les trois premiers suivant des droites EG, ED, EO perpendiculaires à l'arête AB; la ligne EO est la bissectrice de l'angle GED; et, le point F étant situé hors de cette ligne, on a $FG < FD$.

COROLLAIRE. *Tout plan, qui a trois points non en ligne droite, dans un angle dièdre, situés chacun à égale distance de ses faces, divise cet angle en deux parties égales.*

THÉORÈME XXXIV.

Étant données deux droites AB, CD non situées dans un même plan, 1° on peut mener une perpendi-

culaire commune à ces droites ; 2° on n'en peut mener qu'une seule ; 3° cette perpendiculaire est la distance des deux droites.



1° D'un point A, pris sur AB, menons AE parallèle à CD ; par les deux droites AB, AE conduisons le plan MN, parallèle à CD (3) ; d'un point F de CD abaissons FG perpendiculaire au plan MN ; menons GH parallèle à AE jusqu'à la rencontre de AB en H ;

du point H, menons une parallèle à FG jusqu'à la rencontre de CD en I ; la droite HI est la perpendiculaire demandée.

En effet, FG étant perpendiculaire au plan MN, la droite HI, parallèle à FG, est perpendiculaire au même plan, et, par suite, aux droites AB, GH menées par son pied dans ce plan ; de plus, les droites CD, GH, parallèles à AE, sont parallèles entre elles ; donc HI, perpendiculaire à GH, est aussi perpendiculaire à CD ; donc elle est à la fois perpendiculaire aux deux droites AB, CD.

2° Car, supposons qu'une autre droite BD soit à la fois perpendiculaire aux deux lignes AB, CD. Le plan des deux droites CD, BD couperait le plan MN suivant BK parallèle à CD (3, cor. 1) ; donc BD, perpendiculaire à CD, serait aussi perpendiculaire à BK ; mais, par hypothèse, BD est perpendiculaire sur AB ; donc BD serait perpendiculaire au plan MN (8, cor. 1) et, par suite, parallèle à HI (13) ; donc les deux droites AB, CD seraient situées dans un même plan HBDI, ce qui est contre la supposition ; donc HI est la seule perpendiculaire commune aux deux lignes AB, CD.

3° La ligne HI est plus courte que toute autre droite BD, menée d'un point de AB à CD. Car la perpendiculaire DL, abaissée du point D sur le plan MN, est égale à la droite HI (30, rem.) et plus courte que l'oblique DB (28) ; donc $HI < DB$.

LIVRE II.

LES ANGLES SOLIDES ET LES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.



1. L'ouverture de trois ou d'un plus grand nombre de plans, qui se rencontrent tous en un seul point, s'appelle *angle solide* ou *angle polyèdre*.

Ce point est le *sommet* de l'angle.

2. Les plans qui forment un angle solide se rencontrent consécutivement suivant des droites qu'on nomme les *arêtes* ou *côtés* de l'angle.

3. La partie de plan indéfinie, comprise entre deux arêtes consécutives d'un angle solide, est une *face* de l'angle.

REMARQUE. L'angle solide se désigne par la lettre S du sommet ou par les lettres SABCD de ses arêtes, en commençant par celle du sommet.

4. L'angle solide qui a trois faces s'appelle *angle trièdre*; celui qui en a quatre, *angle tétraèdre*; celui qui en a cinq, *angle pentaèdre*; et ainsi de suite.

5. Un angle trièdre est *birectangle* ou *trirectangle* selon qu'il a deux ou trois angles plans droits.

6. Deux angles solides *coïncident*, quand ils ont même sommet, et que leurs faces *coïncident*.

7. Deux angles solides susceptibles de coïncider sont *égaux*.

8. Deux angles sont *opposés au sommet*, lorsque chacun d'eux est formé par les prolongements des faces de l'autre.

9. Deux angles trièdres sont *supplémentaires*, quand les angles plans de l'un sont les suppléments des angles plans correspondants aux angles dièdres de l'autre.

10. Un solide, terminé de toutes parts par des polygones, se nomme *polyèdre*.

11. Ces polygones sont les *faces* du polyèdre.

REMARQUE. Quelquefois la surface brisée (princ. déf. 16) se désigne aussi sous le nom de *polyèdre*.

12. La droite, suivant laquelle deux faces consécutives se rencontrent; s'appelle *arête* ou *côté* du polyèdre.

13. Les *sommets* d'un polyèdre sont les sommets des angles solides formés par ses faces.

14. La droite qui joint, dans un polyèdre, deux sommets non situés sur la même face, est une *diagonale* du polyèdre.

15. Le polyèdre de quatre faces s'appelle *tétraèdre*; celui de cinq, *pentaèdre*; celui de six, *hexaèdre*; et ainsi de suite.

16. Le *prisme* est un solide compris sous plusieurs plans qui se rencontrent consécutivement suivant des droites parallèles entre elles, et qui sont terminés, de part et d'autre, par deux plans parallèles.



Ces droites sont les arêtes *latérales* du prisme.

REMARQUE. Pour construire un prisme, soit $ABCDE$ un polygone quelconque. Menons par les sommets de ce polygone, et d'un même côté de son plan, les droites AG , BH , CI , etc., toutes parallèles entre elles (liv. 1, 5); et, par un point G , pris sur l'une de ces droites, conduisons un plan parallèle à celui du polygone $ABCDE$ (liv. 1, 7): ce plan rencontre les autres droites en des points H , I , K , F (liv. 1, 4, cor. 2); et le solide $ABCDEFGH I K$, ainsi formé, est un prisme.

17. Chacune des faces $A E F G$, $A G H B$, etc., comprises entre deux arêtes latérales, est une face *latérale* du prisme.

REMARQUE. Dans tout prisme, les arêtes latérales sont égales (liv. 1, 30) et les faces latérales sont des parallélogrammes (liv. 1, 4).

18. Les deux polygones $ABCDE$, $F G H I K$, auxquels se terminent les arêtes latérales, sont les *bases* du prisme.

19. La *hauteur* d'un prisme est la distance des deux bases.

20. Un prisme est *droit* ou *oblique* selon que ses arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux plans des bases.

21. Un prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *penta-gonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

22. Le *parallélépipède* est un hexaèdre dont les faces opposées sont parallèles.



REMARQUE 1. Pour construire ce solide, soient OA, OB, OC trois droites finies qui se rencontrent en un même point O, et non situées dans un même plan. Conduisons chacun des plans AOB, AOC, BOC; par le point A, menons un plan parallèle à BOC (liv. 1, 7); par le point B, un plan parallèle à AOC; et, par le point C, un plan parallèle à AOB. Le solide ADFECOBG, ainsi formé, est un parallélépipède.

REMARQUE 2. Toutes les faces d'un parallélépipède sont des parallélogrammes (liv. 1, 4); et les quatre arêtes AO, DB, FG, EC, comprises entre deux faces opposées; sont égales et parallèles (liv. 1, 5 et 30).

REMARQUE 3. Tout parallélépipède peut être considéré comme un prisme (déf. 16) dont les bases sont des parallélogrammes.

23. La *base* d'un parallélépipède est indifféremment une face quelconque.

24. La *hauteur* d'un parallélépipède est la distance de la base à la face opposée.



25. Le parallélépipède *rectangle* est celui dont toutes les faces sont des rectangles.

Ainsi, en supposant les trois droites OA, OB, OC perpendiculaires entre elles, le solide ADFECOBG, obtenu par la construction précédente (déf. 22, rem. 1), est un parallélépipède rectangle.

26. Le *cube* est un parallélépipède dont toutes les faces sont des carrés.

Ainsi, en supposant les trois droites OA, OB, OC égales et perpendiculaires entre elles, le solide ADFECOBG (déf. 22, rem. 1) est un cube.



27. La *pyramide* est un solide compris sous un polygône ABCD, et les triangles qui ont pour bases les différents côtés du polygône et, pour sommet commun, un point situé hors de son plan.

28. Ce polygône est la *base* de la pyramide.

29. Le *sommet* d'une pyramide est le sommet opposé à la base.

30. La *hauteur* d'une pyramide est la perpendiculaire SO, abaissée du sommet sur le plan de la base.

31. Les arêtes *latérales* d'une pyramide sont celles qui joignent le sommet à la base.

32. Les faces *latérales* d'une pyramide sont celles qui ont pour sommet commun celui de la pyramide.

33. Une pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, etc., selon qu'elle a pour base un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

34. Un angle solide est *convexe*, lorsque ses arêtes sont toutes situées d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces.

Ainsi tous les angles trièdres sont convexes.

35. Tout polyèdre, situé entièrement d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces, est un polyèdre *convexe*.

Ainsi les prismes et les pyramides, à bases convexes, sont des polyèdres convexes.

REMARQUE. Tous les angles solides et les polyèdres, dont il sera question dans ce traité, seront convexes.

36. Deux polyèdres sont *de même espèce*, lorsque leurs surfaces sont composées d'un même nombre de triangles, de quadrilatères, de pentagones, etc. situés de la même

manière. Ainsi, deux prismes ou deux pyramides sont de même espèce, lorsque leurs bases ont le même nombre de côtés.

37. Lorsque deux angles solides, qui ont un angle dièdre égal, sont tels qu'en coupant leurs faces par un plan de manière que leurs sommets soient situés d'un même côté de ce plan, et suivant, dans un même sens, les contours des deux polygones qui en résultent, le second angle dièdre de l'un des angles solides soit égal au second de l'autre, le troisième au troisième et ainsi de suite; ces angles solides *ont les angles dièdres égaux chacun à chacun, et situés dans le même ordre.*

Lorsque les mêmes égalités ont lieu, en suivant les contours des deux polygones en sens contraire, les deux angles solides *ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans un ordre inverse.*

38. Dans deux angles solides qui ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre ou dans un ordre inverse, on nomme 1° angles dièdres *homologues*, les angles dièdres qui ont le même rang; 2° arêtes *homologues*, les arêtes des angles dièdres homologues; 3° angles plans *homologues*, les angles formés par des arêtes homologues.

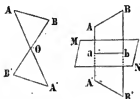
39. Deux polyèdres *ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre ou dans un ordre inverse*, lorsque leurs angles solides, pris deux à deux, ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre ou dans un ordre inverse (déf. 37), en supposant d'ailleurs que deux angles dièdres $AB, A'B'$, homologues dans deux angles solides A et A' (déf. 38, 1°), soient aussi regardés comme homologues dans les deux autres angles solides B et B' auxquels ils appartiennent.

40. Dans deux polyèdres qui ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre ou dans un ordre inverse, on nomme 1° angles dièdres *homologues*, ceux qui sont homologues dans deux angles solides (déf.

38, 1°) ; 2° angles solides *homologues*, ceux dont les angles dièdres sont homologues ; 3° sommets *homologues*, ceux des angles solides homologues ; 4° arêtes *homologues*, celles qui joignent des sommets homologues ; 5° angles plans *homologues*, les angles formés par des arêtes homologues ; 6° faces *homologues*, les faces terminées par des arêtes homologues ; 7° diagonales *homologues*, celles qui joignent des sommets homologues ; 8° pyramides *homologues*, celles dont les sommets sont homologues.

41. Deux points sont *symétriques* par rapport à un troisième, lorsque celui-ci divise en deux parties égales la droite qui joint les deux autres.

42. Deux points sont *symétriques* par rapport à une droite ou à un plan, lorsque cette droite, ou ce plan, est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.



43. Deux droites $AB, A'B'$ sont *symétriques* par rapport à un point O , à une droite ab ou à un plan MN , lorsque leurs extrémités A et A' , B et B' sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan (déf. 41 et 42).

44. Deux polygones, ou deux polyèdres, sont *symétriques* par rapport à un point, à une droite ou à un plan, lorsque chaque sommet de l'un est symétrique d'un sommet de l'autre par rapport au point, à la droite ou au plan dont il s'agit.

Ce point, cette droite, ce plan s'appellent *centre de symétrie*, *axe de symétrie*, *plan de symétrie*.

45. Dans deux polyèdres symétriques par rapport à un point, à une droite ou à un plan, on nomme 1° sommets *homologues*, les sommets symétriques par rapport au centre, à l'axe ou au plan de symétrie ; 2° angles solides *homologues*, ceux dont les sommets sont homologues ; 3° arêtes *homolo-*

gues, celles qui joignent des sommets homologues ; 4° angles plans *homologues*, les angles formés par des arêtes homologues ; 5° angles dièdres *homologues*, ceux dont les arêtes sont homologues ; 6° faces *homologues*, les faces terminées par des arêtes homologues ; 7° diagonales *homologues*, celles qui joignent des sommets homologues ; 8° pyramides *homologues*, celles dont les sommets sont homologues.

46. Deux angles solides $SABC\dots$, $S'A'B'C'\dots$ sont *symétriques* par rapport à un point, à une droite ou à un plan, lorsque leurs sommets S , S' et les extrémités A et A' , B et B' , C et C' , etc., de droites finies, prises sur leurs arêtes à partir des sommets, sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan (déf. 41 et 42).

Ainsi, les angles solides homologues de deux polyèdres, symétriques par rapport à un point, à une droite ou à un plan (déf. 45), sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan. Deux angles solides opposés au sommet (déf. 8) sont symétriques par rapport au sommet commun.

47. Dans deux angles solides symétriques par rapport à un point, à une droite ou à un plan, on nomme 1° arêtes *homologues*, les arêtes sur lesquelles sont prises les droites symétriques par rapport à ce point, à cette droite, ou à ce plan ; 2° angles dièdres *homologues*, ceux dont les arêtes sont homologues ; 3° angles plans *homologues*, les angles formés par des arêtes homologues.

48. Deux angles plans BAC , $B'A'C'$ sont *symétriques* par rapport à un point, à une droite ou à un plan, lorsque leurs sommets A , A' et les extrémités B et B' , C et C' de droites finies, prises sur leurs côtés à partir des sommets, sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan (déf. 41 et 42).

Ainsi, les angles plans homologues de deux polyèdres ou de deux angles solides, symétriques par rapport à un point, à une droite ou à un plan (déf. 45 et 47), sont symétriques par rapport à ce point, à cette droite ou à ce plan. Deux

angles plans, opposés au sommet, sont symétriques par rapport au sommet commun.

49. Lorsqu'une figure tourne autour d'une droite immobile, à laquelle elle est fixée invariablement, on dit que la figure fait un *mouvement de révolution* autour de la droite.

REMARQUE. Chaque point de la figure mobile décrit une circonférence qui a son centre sur la droite fixe et dont le plan est perpendiculaire à cette droite.

THÉORÈME PREMIER.

Deux angles solides $SABCD$, $Sabcd$, opposés au sommet, ont les angles plans et les angles dièdres égaux chacun à chacun.



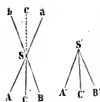
Les arêtes de l'angle solide $Sabcd$ étant les prolongements de celles de l'angle solide $SABCD$ (déf. 8), les angles plans ASB et aSb sont égaux comme opposés au sommet; on a de même $BSC = bSc$, $CSD = cSd$, etc.; de plus, les angles dièdres SA et Sa , SB et Sb , etc., sont égaux comme opposés à l'arête (liv. 1, 24, cor. 2); donc les deux angles solides ont les angles plans et les angles dièdres égaux chacun à chacun.

REMARQUE. Deux angles solides opposés au sommet ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans un ordre inverse (déf. 37).

THÉORÈME II.

Lorsque deux angles trièdres $SABC$, $S'A'B'C'$ ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans

égaux chacun à chacun et situés de la même manière, le troisième angle plan de l'un est égal au troisième de l'autre; les deux angles trièdres sont égaux, et les autres angles dièdres, opposés à des angles plans égaux, sont égaux entre eux.



Soit l'angle dièdre $SA = S'A'$, l'angle plan $ASB = A'S'B'$ et l'angle plan $ASC = A'S'C'$.

Plaçons la première figure sur la seconde, de manière que l'angle ASB coïncide avec $A'S'B'$. Puisque l'angle dièdre $SA = S'A'$, le plan de la face ASC coïncidera avec celui de la face $A'S'C'$; et, puisque l'angle plan $ASC = A'S'C'$, l'arête SC prendra la direction $S'C'$: donc le troisième angle plan BSC coïncidera avec $B'S'C'$, l'angle solide $SABC$ avec $S'A'B'C'$, l'angle dièdre SB avec $S'B'$ et l'angle dièdre SC avec $S'C'$; donc $BSC = B'S'C'$, l'angle solide $SABC = S'A'B'C'$, l'angle dièdre $SB = S'B'$ et l'angle dièdre $SC = S'C'$.

REMARQUE 1. Lorsque les angles plans, qu'on suppose égaux, ne sont pas situés de la même manière, et qu'on a, par exemple, l'angle dièdre $Sa = S'A'$, l'angle plan $aSb = A'S'B'$ et l'angle plan $aSc = A'S'C'$, l'égalité des deux angles solides $Sabc$, $S'A'B'C'$ ne peut se déduire de la supposition : car si l'on place la figure $Sabc$ sur $S'A'B'C'$ de manière que l'angle plan aSb coïncide avec $A'S'B'$, l'arête Sa prendra la direction de $S'B'$ et l'arête Sb celle de $S'A'$: alors les deux angles dièdres égaux Sa et $S'A'$ n'auront pas d'arête commune et, par suite, la coïncidence des deux angles trièdres ne pourra s'établir, comme dans le cas précédent. Mais l'égalité des troisièmes angles plans et celle des autres angles dièdres, opposés à des angles plans égaux, auront encore lieu.

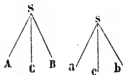
En effet, soit $SABC$ l'angle solide opposé au sommet de

Sabc. L'angle dièdre $SA = Sa$ (1) $= S'A'$; l'angle plan $ASB = aSb = A'S'B'$ et l'angle plan $ASC = aSc = A'S'C'$; donc les angles solides $SABC$, $S'A'B'C'$ ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun et situés de la même manière; donc l'angle plan $BSC = B'S'C'$, l'angle dièdre $SB = S'B'$ et l'angle dièdre $SC = S'C'$; or $BSC = bSc$, $SB = Sb$ et $SC = Sc$; donc $bSc = B'S'C'$, $Sb = S'B'$ et $Sc = S'C'$.

REMARQUE 2. On prouverait de même qu'en général deux angles solides de n faces (déf. 4) sont égaux, lorsqu'ils ont $n-2$ angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les $n-1$ angles plans homologues égaux. Il en résulte que l'égalité de deux angles solides de n faces exige, comme celle de deux polygones de n côtés, $n-3$ conditions.

THÉORÈME III.

Lorsque deux angles plans ASC , BSC sont égaux dans un angle trièdre $SABC$, les angles dièdres SB , SA , opposés à ces angles plans, sont aussi égaux entre eux.

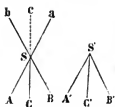


Concevons un second angle trièdre $sabc$, égal au premier: ces deux angles solides ont l'angle dièdre $SC = sc$, l'angle plan $ASC = asc$ et l'angle plan $BSC = asc$: donc, en vertu du théorème précédent, l'angle dièdre SB , opposé à l'angle plan ASC du premier, est égal à l'angle dièdre sa , opposé à l'angle plan bsc du second; or $SA = sa$, donc $SB = SA$.

THÉORÈME IV.

Lorsque deux angles trièdres ont un angle plan égal

adjacent à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière, le troisième angle dièdre de l'un est égal au troisième angle dièdre de l'autre, les deux angles trièdres sont égaux, et les autres angles plans, opposés à des angles dièdres égaux, sont égaux entre eux.



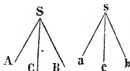
Soit l'angle plan $ASB = A'S'B'$, l'angle dièdre $SA = S'A'$ et l'angle dièdre $SB = S'B'$.

Plaçons la première figure sur la seconde de manière que l'angle plan ASB coïncide avec $A'S'B'$. Puisque l'angle dièdre $SA = S'A'$, le plan de la face ASC coïncidera avec celui de la face $A'S'C'$; pareillement, puisque l'angle dièdre $SB = S'B'$, le plan de la face BSC coïncidera avec celui de la face $B'S'C'$; donc l'arête SC , intersection des deux plans ASC , BSC , coïncidera avec l'arête $S'C'$, intersection des deux plans $A'S'C'$, $B'S'C'$, l'angle dièdre SC avec l'angle dièdre $S'C'$, l'angle solide $SABC$ avec $S'A'B'C'$, l'angle plan ASC avec $A'S'C'$ et l'angle plan BSC avec $B'S'C'$; donc l'angle dièdre $SC = S'C'$, l'angle solide $SABC = S'A'B'C'$, l'angle plan $ASC = A'S'C'$ et l'angle plan $BSC = B'S'C'$.

REMARQUE. Si les angles dièdres Sa et $S'A'$, Sb et $S'B'$, qu'on suppose égaux, n'étaient pas situés de la même manière, l'égalité des troisièmes angles dièdres et celle des autres angles plans, opposés à des angles dièdres égaux, auraient encore lieu; mais alors l'angle solide $S'A'B'C'$ serait égal à l'angle $SABC$ opposé au sommet de $Sabc$. La démonstration est analogue à celle qu'on a donnée précédemment (2, rem. 1).

THÉORÈME V.

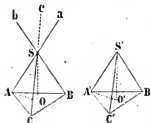
Lorsque deux angles dièdres SA , SB , sont égaux dans un angle trièdre $SABC$, les angles plans BSC , ASC , opposés à ces angles dièdres, sont aussi égaux entre eux.



Concevons un second angle trièdre $sabc$ égal au premier : ces deux angles solides ont l'angle plan $ASB = asb$, l'angle dièdre $SA = sb$ et l'angle dièdre $SB = sa$; donc, en vertu du théorème précédent, l'angle plan BSC , opposé à l'angle dièdre SA du premier, est égal à l'angle plan asc , opposé à l'angle dièdre sb du second; or $ASC = asc$, donc $BSC = ASC$.

THÉORÈME VI.

Lorsque deux angles trièdres $SABC$, $S'A'B'C'$ ont les angles plans égaux chacun à chacun et situés de la même manière, les angles dièdres opposés aux angles plans égaux sont égaux entre eux, ainsi que les deux angles solides proposés.



Soit l'angle plan $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$ et $BSC = B'S'C'$.

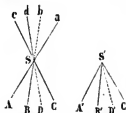
Prenons, sur les arêtes des angles solides, des grandeurs SA , SB , SC , $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ égales entre elles, et menons AB , AC , BC , $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$. Les triangles ASB , $A'S'B'$

ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc le troisième côté $AB = A'B'$; on a de même $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; donc les triangles ABC , $A'B'C'$ sont égaux (g. pl. liv. II, 11) et, par suite, le rayon AO du cercle circonscrit au triangle ABC est égal au rayon $A'O'$ du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Mais puisqu'on a, par hypothèse, $SA = SB = SC$, $OA = OB = OC$, la droite SO est perpendiculaire au plan ABC (liv. I, 31, cor. 2); pareillement, la droite $S'O'$ est perpendiculaire au plan $A'B'C'$; donc les triangles AOS , $A'O'S'$ sont rectangles; d'ailleurs l'hypoténuse $SA = S'A'$ et le côté $AO = A'O'$; donc $SO = S'O'$ (g. pl. liv. II, 14). Cela étant, plaçons la figure $SABC$ sur la figure $S'A'B'C'$ de manière que le triangle ABC coïncide avec $A'B'C'$; le point O tombera au point O' , la droite OS , perpendiculaire au plan ABC , prendra la direction de $O'S'$ perpendiculaire au plan $A'B'C'$ (liv. I, 10); et, puisque $SO = S'O'$, le point S tombera en S' ; donc les arêtes SA , SB , SC coïncideront avec les arêtes $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$; les angles dièdres SA , SB , SC avec les angles dièdres $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ et l'angle solide $SABC$ avec $S'A'B'C'$; donc l'angle dièdre $SA = S'A'$, $SB = S'B'$, $SC = S'C'$ et l'angle solide $SABC = S'A'B'C'$.

REMARQUE. Si les angles plans aSb et $A'S'B'$, aSc et $A'S'C'$, bSc et $B'S'C'$, qu'on suppose égaux, n'étaient pas situés de la même manière, les angles dièdres, opposés aux angles plans égaux, seraient encore égaux entre eux; mais alors l'angle trièdre $S'A'B'C'$ serait égal à l'angle $SABC$ opposé au sommet de $Sabc$. Car ces deux angles solides ont les angles plans égaux chacun à chacun et situés de la même manière.

THÉORÈME VII.

Deux angles solides $SABCD$, $S'A'B'C'D'$, qui ont les arêtes parallèles chacune à chacune et dirigées dans le même sens, sont égaux entre eux.



En effet, les angles ASB , $A'S'B'$, ayant les côtés parallèles chacun à chacun et dirigés dans le même sens, sont égaux entre eux, et le plan ASB est parallèle au plan $A'S'B'$ (liv. I, 6); par la même raison, l'angle BSC est égal à $B'S'C'$ et leurs plans sont parallèles, et ainsi de suite : de plus, les angles dièdres SA et $S'A'$, SB et $S'B'$, etc., sont égaux comme ayant leurs faces parallèles chacune à chacune et dirigées dans le même sens (liv. I, 26); donc les angles solides $SABCD$, $S'A'B'C'D'$ ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les angles plans homologues égaux; donc ils sont égaux (2, rem. 2).

REMARQUE. Si les arêtes parallèles Sa et $S'A'$, Sb et $S'B'$, etc., étaient dirigées en sens contraire, l'angle solide $S'A'B'C'D'$ serait égal à l'angle $SABCD$ opposé au sommet de $Sabcd$.

THÉORÈME VIII.

Lorsque, au sommet d'un angle trièdre $SABC$, on élève, sur chaque face, une perpendiculaire, du même côté du plan de cette face que la troisième arête, l'angle trièdre, qui a pour arêtes ces trois perpendiculaires, et l'angle trièdre proposé sont supplémentaires.



Soit la droite SC' , perpendiculaire sur la face ASB , et située du même côté du plan ASB que l'arête SC ; la droite SB' , perpendiculaire sur la face ASC , et située du même côté du plan ASC que l'arête SB ; et la droite SA' , perpendiculaire sur la face BSC , du

même côté du plan BSC que l'arête SA ; les angles trièdres SABC, SA'B'C' sont supplémentaires (déf. 9).

En effet, la droite SA' est perpendiculaire à la face BSC de l'angle dièdre ASCB, et située du même côté du plan BSC que la face ASC ; pareillement, la droite SB' est perpendiculaire à la face ASC, et située du même côté du plan ASC que la face BSC ; donc l'angle A'SB' est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre ASCB (liv. 1, 27, cor. 2) ; par la même raison, l'angle A'SC' est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre ASBC, et l'angle B'SC' est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre BSAC ; donc les angles plans de l'angle solide SA'B'C' sont les suppléments de ceux qui correspondent aux angles dièdres de l'angle solide SABC.

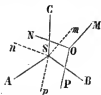
De plus, la droite SC', perpendiculaire au plan ASB, étant située du même côté de ce plan que l'arête SC, l'angle CSC' est aigu ; donc l'arête SC, perpendiculaire au plan A'SB' (liv. 1, 8), est située du même côté de ce plan que l'arête SC' ; pareillement, l'arête SB, perpendiculaire au plan A'SC', est située du même côté de ce plan que l'arête SB', et l'arête SA, perpendiculaire au plan B'SC', est située du même côté de ce plan que l'arête SA' ; donc, en vertu de ce qui précède, les angles plans de l'angle solide SABC sont les suppléments de ceux qui correspondent aux angles dièdres de l'angle solide SA'B'C' ; donc ces deux angles solides sont supplémentaires.

REMARQUE. On prouverait de même que l'angle solide SABC et l'angle solide *Sabc*, qui a pour arêtes les prolongements de celles de SA'B'C', sont aussi supplémentaires (liv. 1, 27, cor. 2) ; ce qui résulte d'ailleurs de ce que les angles solides *Sabc*, SA'B'C', opposés au sommet, ont les mêmes angles plans, et les mêmes angles dièdres (1).

THÉORÈME IX.

Lorsque, d'un point O, pris dans un angle trièdre

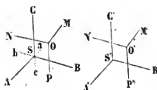
SABC, on abaisse des perpendiculaires OM, ON, OP sur les plans des faces BSC, ASC, ASB, l'angle solide proposé et celui qui a pour arêtes ces trois perpendiculaires, sont supplémentaires.



Menons Sm parallèle à OM et dirigée dans le même sens; menons, de même, Sn parallèle à ON et Sp parallèle à OP . Les angles solides $OMNP$, $Smnp$ sont égaux entre eux (7); de plus, OM étant perpendiculaire au plan BSC , l'arête Sm , parallèle à OM , est perpendiculaire au même plan, et dirigée de l'autre côté de ce plan par rapport à l'arête SA ; on voit de même que l'arête Sn est perpendiculaire au plan ASC et dirigée de l'autre côté de ce plan par rapport à SB , et que l'arête Sp est perpendiculaire au plan ASB et dirigée de l'autre côté de ce plan par rapport à SC ; donc les angles trièdres $SABC$, $Smnp$ sont supplémentaires (8, rem.); donc il en est de même des angles trièdres $SABC$, $OMNP$.

THÉORÈME X.

Lorsque deux angles trièdres $SABC$, $S'A'B'C'$ ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, les angles plans opposés aux angles dièdres égaux sont égaux entre eux, ainsi que les deux angles solides proposés.



Soit l'angle dièdre $SA = S'A'$, $SB = S'B'$, $SC = S'C'$.

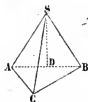
D'un point O , pris dans l'angle solide $SABC$, abaissons les perpendiculaires OM , ON , OP sur les faces BSC , ASC , ASB ;

et d'un point O' , pris dans l'angle solide S' , les perpendiculaires $O'M'$, $O'N'$, $O'P'$ sur les faces $B'S'C'$, $A'S'C'$, $A'S'B'$. Les angles solides $SABC$ et $OMNP$, $S'A'B'C'$ et $O'M'N'P'$ sont supplémentaires (9); donc l'angle plan MON est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre SC ; pareillement, l'angle plan $M'O'N'$ est le supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre $S'C'$; mais, par hypothèse, l'angle dièdre $SC = S'C'$; donc les angles plans qui leur correspondent sont aussi égaux entre eux (liv. I, 16); donc $MON = M'O'N'$. On prouvera de même que l'angle $MOP = M'O'P'$ et que l'angle $NOP = N'O'P'$. Donc les angles solides O et O' ont les angles plans égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre; donc l'angle dièdre OM , opposé à l'angle NOP , est égal à l'angle dièdre $O'M'$, opposé à l'angle $N'O'P'$ (6) et, par suite, l'angle BSC , supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre OM , est égal à l'angle $B'S'C'$, supplément de celui qui correspond à l'angle dièdre $O'M'$; par la même raison, $ASC = A'S'C'$, $ASB = A'S'B'$; donc l'angle solide $SABC = S'A'B'C'$ (2).

REMARQUE. Si les angles dièdres Sa et $S'A'$, Sb et $S'B'$, Sc et $S'C'$, qu'on suppose égaux, n'étaient pas situés dans le même ordre, les angles plans, opposés aux angles dièdres égaux, seraient encore égaux entre eux: mais alors l'angle trièdre $S'A'B'C'$ serait égal à l'angle $SABC$ opposé au sommet de $Sabc$. Car ces deux angles solides ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre.

THÉORÈME XI.

Dans tout angle trièdre $SABC$, un angle plan quelconque est plus petit que la somme des deux autres.



1° Il suffit de prouver que le plus grand des trois angles plans est plus petit que la somme des deux autres. Soit $ASB > ASC$ et $ASB > BSC$; on aura $ASB < ASC + BSC$.

Dans l'angle ASB , faisons l'angle $ASD = ASC$; menons la droite AB qui rencontre les lignes SA , SD , SB aux points A , D , B ; prenons $SC = SD$, et menons AC , BC . Les triangles ASC , ASD ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc le troisième côté $AC = AD$; mais, dans le triangle ABC , on a le côté $AB < AC + BC$; donc $AB - AD < (AC + BC) - AC$, ou $BD < BC$; de plus, les triangles SBD , SBC ont le côté SB commun et le côté $SD = SC$; donc $BSD < BSC$ (g. pl. liv. n, 26, cor.); ajoutant, de part et d'autre, l'angle ASC , ou ASD , il vient $ASB < ASC + BSC$.

REMARQUE. On voit, par la même démonstration, que dans tout angle trièdre $SABC$, un angle plan quelconque BSC est plus grand que la différence des deux autres.

THÉORÈME XII.

Dans tout angle trièdre $SABC$, à un plus petit angle dièdre est opposé un plus petit angle plan; et réciproquement.



1° Soit l'angle dièdre $SB < SA$; on aura l'angle plan $ASC < BSC$.

Concevons, dans l'angle dièdre SA , un plan SAD qui fasse avec le plan ASB un angle dièdre $BASD = SB$; et soit SD l'intersection de ce plan avec la face BSC .

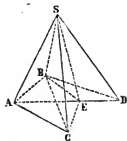
Puisque, dans l'angle trièdre $SABD$, l'angle dièdre $BASD = SB$, l'angle plan $BSD = ASD$ (5); mais, dans l'angle trièdre $SACD$, on a l'angle plan $ASC <$

$ASD + CSD$ (11); remplaçant ASD par BSD , il vient $ASC < BSD + CSD$, ou $ASC < BSC$.

2^o Réciproquement, soit l'angle plan $ASC < BSC$; je dis que l'angle dièdre SB est plus petit que SA . Car, si l'on avait $SB = SA$, l'angle plan ASC serait égal à BSC (5), ce qui est contre la supposition; et, si l'on avait $SB > SA$, l'angle ASC serait plus grand que BSC (1^o), ce qui est encore contre la supposition; donc $SB < SA$.

THÉORÈME XIII.

Lorsque deux angles trièdres ont deux angles plans égaux chacun à chacun, et l'angle dièdre, compris entre les deux angles plans du premier, plus petit que l'angle dièdre compris entre les deux angles plans du second, le troisième angle plan du premier angle trièdre est plus petit que le troisième angle plan du second.



Soient SAB , $SABD$ les angles proposés, qui ont l'angle plan ASB commun, l'angle plan $BSC = BSD$ et l'angle dièdre $ABSC < ABSD$; je dis que le troisième angle plan ASC est plus petit que le troisième angle plan ASD .

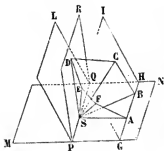
Concevons la différence $CBSD$ des angles $ABSD$, $ABSC$ divisée en deux parties égales; le plan bissecteur rencontrera la face ASD suivant une droite ES : cela étant, si l'on mène le plan ESC , les angles trièdres $SBCE$, $SBDE$ auront l'angle dièdre $EBSC = EBSD$, l'angle plan BSE commun et l'angle $BSC = BSD$ par hypothèse; donc le troisième angle plan $ESC = ESD$ (2); mais, dans l'angle trièdre $SACE$, on a $ASC < ASE + ESC$ (11); remplaçant ESC par ESD , on aura $ASC < ASE + ESD$, ou $ASC < ASD$.

REMARQUE. Si les angles solides proposés n'étaient pas situés, comme le suppose la démonstration précédente, d'un même côté du plan de la face commune ASB , on rendrait cette situation possible, en substituant à l'un d'eux l'angle qui lui est opposé au sommet (1).

RÉCIPROQUEMENT. Lorsque deux angles trièdres ont deux angles plans égaux chacun à chacun, et le troisième angle plan du premier plus petit que le troisième angle plan du second, l'angle dièdre, opposé au troisième angle plan du premier angle trièdre, est plus petit que l'angle dièdre opposé au troisième angle plan du second. Car, si l'angle dièdre, opposé au troisième angle plan du premier angle solide, était égal ou supérieur à l'angle dièdre opposé au troisième angle plan du second, le troisième angle plan du premier serait égal (2) ou supérieur (13) au troisième angle plan du second, ce qui est contraire à la supposition.

THÉORÈME XIV.

Lorsqu'un angle solide $SAB CDE F$ a toutes ses arêtes situées d'un même côté du plan MN de l'une de ses faces, ASB , on peut conduire un plan qui rencontre toutes ses arêtes, sans passer par le sommet.



Traçons par le point S , dans le plan MN , une droite PQ hors de l'angle ASB ; menons un plan par la ligne PQ et chacune des arêtes SC , SD ... SF : supposons que le plan PQR , conduit suivant PQ et l'arête SD , soit, de tous ces plans, celui qui fait avec MN le plus petit an-

gle dièdre, de l'autre côté de PQ par rapport à l'angle ASB, et menons, dans l'angle dièdre MPQR, un plan PQL. Toutes les arêtes de l'angle solide SABCDEF seront situées dans l'angle dièdre LPQN; donc tout plan GHI mené, dans cet angle dièdre, parallèlement au plan PQL, rencontrera les arêtes SA, SB... SF (liv. I, 4, cor. 2) sans passer par le sommet.

THÉORÈME XV.

La somme des angles plans d'un angle solide S est moindre que quatre angles droits.



Menons un plan qui coupe les faces de l'angle solide suivant les droites AB, BC, CD, AD (14); prenons un point O dans l'intérieur du polygone ABCD, et menons AO, BO, CO, DO. Nous formerons ainsi autant de triangles autour du point O qu'il y a de triangles dont le sommet commun est au point S; donc la somme des angles des triangles qui ont pour sommet le point O est égale à celle des angles des triangles qui ont pour sommet le point S; mais, dans l'angle trièdre A, on a $\angle BAO + \angle DAO$, ou $\angle BAD < \angle SAB + \angle SAD$ (11); pareillement, dans l'angle trièdre B, on a $\angle ABO + \angle CBO$, ou $\angle ABC < \angle SBA + \angle SBC$, et ainsi de suite; donc la somme des angles à la base est plus petite dans les triangles qui ont leur sommet au point O que dans les triangles qui ont leur sommet au point S; donc la somme des angles en S est moindre que celle des angles en O; or celle-ci est égale à quatre angles droits, donc la somme des angles plans de l'angle solide S est moindre que quatre angles droits.

REMARQUE 1. Cette démonstration suppose que la section ABCD est un polygone convexe, ce qui a toujours lieu dans un angle solide convexe. Car, les arêtes de l'angle solide

étant situées d'un même côté du plan ASB de l'une quelconque de ses faces (déf. 34), le polygone $ABCD$ a tous ses sommets situés d'un même côté de la direction d'un côté quelconque AB ; donc il est convexe.

REMARQUE 2. On prouverait de même que toute section, faite par un plan dans un polyèdre convexe, est un polygone convexe.

COROLLAIRE 1. Donc une ligne droite, menée comme on voudra, ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points. Car si, par cette droite et un point pris dans l'intérieur du polyèdre, on conduit un plan; la section faite par ce plan sera un polygone convexe et la droite proposée ne pourra rencontrer la surface du polyèdre qu'en des points du contour de la section, c'est-à-dire en plus de deux points (g. pl. liv. II, 1).

COROLLAIRE 2. Il en résulte aussi qu'une droite, dont les extrémités sont situées sur la surface d'un polyèdre convexe, est intérieure au polyèdre. Car la droite proposée est intérieure au polygone qu'on obtient en coupant le polyèdre par un plan conduit suivant cette même droite (g. pl. liv. II, 2.).

REMARQUE 3. Lorsque, dans un polyèdre convexe, on coupe par un plan toutes les arêtes qui aboutissent au sommet d'un même angle solide (14), et qu'on enlève la pyramide qui en résulte, on obtient un nouveau polyèdre convexe qui contient une face de plus que le premier; on obtiendra de même un polyèdre convexe qui contiendra une face de plus que le second, et ainsi de suite; donc on peut concevoir des polyèdres convexes de tant de faces qu'on voudra.

THÉORÈME XVI.

Dans tout angle trièdre $SABC$, la somme des angles dièdres est moindre que six et plus grande que deux angles droits.

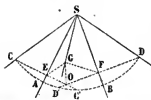


1° Chacun des angles dièdres SA , SB , SC est plus petit que deux angles droits, donc leur somme est moindre que six angles droits.

2° Soit $OMNP$ l'angle trièdre qui a pour arêtes les perpendiculaires abaissées d'un point O , pris dans l'angle solide S , sur les faces BSC , ASC , ASB . Les angles MON , MOP , NOP sont les suppléments des angles plans correspondants aux angles dièdres SC , SB , SA (9); donc la somme de tous ces angles plans est égale à six angles droits; or celle des trois premiers est moindre que quatre angles droits (15), donc celle des trois autres est plus grande que deux angles droits; donc la somme des angles dièdres SC , SB , SA , correspondants à ces angles, est plus grande que deux angles dièdres droits (liv. I, 17).

THÉORÈME XVII.

Avec trois angles plans dont la somme est moindre que quatre angles droits, et tels que chacun d'eux soit plus petit que la somme des deux autres, on peut construire un angle solide.



Soient ASB , ASC , BSD les angles proposés, qu'on suppose situés dans un même plan de manière que ASB , le plus grand des trois, soit intermédiaire et adjacent à chacun des deux autres. Puis-

que la somme des trois angles est moindre que quatre angles droits, les angles ASC , BSD ne seront pas superposés.

Du point S comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons une circonférence qui rencontre les côtés des angles aux points C , A , B , D . Puisque l'angle ASB est plus

grand que chacun des deux angles ASC , BSD , et plus petit que leur somme, l'arc AB est plus grand que chacun des deux arcs AC , BD et plus petit que leur somme (g. pl. liv. III, 7); donc, si l'on prend, sur l'arc ABD , un arc $AC' = AC$ et, sur l'arc BAC , un arc $BD' = BD$, le point C' tombera entre A et B et le point D' entre A et C' ; donc les cordes CC' , DD' se rencontreront en un point O situé dans le cercle (ax. 8 et g. pl. liv. III, 1, cor.); le rayon SA sera perpendiculaire sur le milieu de CC' au point E , et le rayon SB sur le milieu de DD' au point F (g. pl. liv. III, 8, cor. 2). Cela étant, élevons la perpendiculaire OG au plan ASB ; dans le plan COG , décrivons, du point E comme centre, avec un rayon égal à EC , une circonférence qui rencontre OG en un point G ; menons SG , et $SEGF$ sera l'angle trièdre demandé.

En effet, 1° l'angle ASB est un des trois angles proposés; 2° si l'on mène EG , cette droite sera perpendiculaire à SA (liv. I, 14) et les triangles rectangles SEG , SEC auront le côté SE commun et le côté $EG = EC$ par construction; donc l'angle $ESG = ESC$, qui est le second des angles proposés, et l'hypoténuse $SG = SC$ (g. pl. liv. II, 7); 3° si l'on mène GF , qui sera perpendiculaire à SB (liv. I, 14), les triangles rectangles SGF , SDF auront l'hypoténuse $SG = SC = SD$ et le côté SF commun; donc $GSF = DSF$, qui est le troisième des angles donnés.

REMARQUE. On a supposé, dans la figure, que les angles ASC , BSD sont aigus: alors le point O tombe dans le secteur ASB ; la droite EC , ou EC' , est plus grande que EO et, par suite, le triangle OGE est possible (g. pl. liv. III, prob. 24, 2°).

Lorsque les deux angles ASC , BSD sont obtus, le point O tombe dans le secteur formé par les prolongements des rayons AS , BS : alors on a encore $EC > EO$; mais l'égalité des angles ASG et ASC , BSG et BSD s'établit par celle de leurs suppléments.

Lorsque les deux angles ASC , BSD sont droits, les trian-

gles OEG, OFG n'existent plus ; mais la perpendiculaire élevée au point S, sur le plan ASB, est la troisième arête de l'angle solide demandé.

Enfin, les deux angles ASC, BSD peuvent être l'un aigu et l'autre obtus, l'un droit et l'autre aigu, l'un droit et l'autre obtus. L'examen de ces cas particuliers ne présente aucune difficulté.

THÉORÈME XVIII.

L'intersection SD des plans bissecteurs de deux angles dièdres SA, SB d'un angle trièdre SABC est le lieu géométrique des points, situés dans l'angle, à égale distance de ses faces.



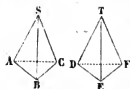
1° Tout point O, pris sur la droite SD, appartenant au plan bissecteur ASD, est également distant des faces ASB, ASC (liv. I, 33) ; ce même point O, appartenant au plan bissecteur BSD, est également distant des deux faces ASB, CSB ; donc il est également distant des trois faces de l'angle solide S.

2° Tout point pris dans l'angle S, hors de la droite SD, n'étant pas situé à la fois dans les deux plans bissecteurs ASD, BSD, n'est pas également distant des trois faces ASB, ASC, BSC (liv. I, 33).

COROLLAIRE. *Les trois plans bissecteurs des angles dièdres d'un angle trièdre SABC se coupent suivant une même droite SD.*

THÉORÈME XIX.

Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont un angle solide égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune et situées de la même manière.

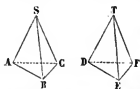


Soit l'angle solide $S = T$, l'arête $SA = TD$, $SB = TE$, $SC = TF$.

Plaçons la première figure sur la seconde, de manière que l'angle solide S coïncide avec l'angle solide T . En vertu de la supposition, l'arête SA prendra la direction TD et le point A tombera au point D ; par la même raison, le point B tombera au point E et le point C au point F ; donc les deux tétraèdres coïncideront; donc ils sont égaux.

THÉORÈME XX.

Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière.



Soit l'angle dièdre $AB = DE$, la face $ABC = DEF$ et la face $SAB = TDE$.

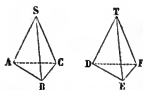
En vertu de la supposition, les deux angles solides A et D ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (2); donc les tétraèdres $SABC$, $TDEF$ ont un angle solide égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune; donc ils sont égaux (19).

REMARQUE. On peut aussi démontrer l'égalité des deux tétraèdres, en superposant les figures de manière que la base ABC coïncide avec DEF ; alors l'angle dièdre AB coïncide avec DE , la face SAB avec TDE , et le point S tombe au point T ; donc les deux pyramides, ayant la base DEF commune et le même sommet T , coïncideront; donc elles sont égales. On prouverait de même qu'en général, *deux pyramides sont égales, lorsqu'elles ont un angle dièdre,*

à la base, égal et compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière. Cela étant, si l'on désigne par $2n$ le nombre des arêtes de chaque pyramide, les bases seront des polygones de n côtés, dont l'égalité exigera $(2n - 3)$ conditions (g. pl. liv. II, 7 et 9); l'égalité des deux angles dièdres à la base et celle des deux faces latérales exigeront, en outre, une et deux conditions; ce qui donnera $(2n - 3 + 1 + 2)$ ou $2n$ conditions pour l'égalité des pyramides proposées. Ainsi le nombre des conditions nécessaires pour l'égalité de deux pyramides de même espèce (déf. 36), est égal au nombre des arêtes de chaque pyramide.

THÉORÈME XXI.

Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière.

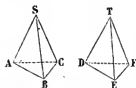


Soit la face $ABC = DEF$, l'angle dièdre $AB = DE$, l'angle dièdre $AC = DF$ et l'angle dièdre $BC = EF$. En vertu de la supposition, les angles solides A et D ont un angle plan égal adjacent à deux angles dièdres égaux chacun à chacun; donc $BAS = EDT$ (4). En considérant les angles solides B et E, on prouvera de même que l'angle $ABS = DET$; donc les triangles ABS , DET ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux. Il en résulte que les tétraèdres $SABC$, $TDEF$ ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière; donc ils sont égaux (20).

REMARQUE. L'égalité des deux tétraèdres peut aussi s'établir immédiatement par la coïncidence des figures.

THÉORÈME XXII.

Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont les arêtes égales chacune à chacune et situées de la même manière.

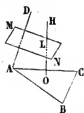


Soit l'arête $SA = TD$, $SB = TE$, $SC = TF$, etc.

Les triangles ASB et DTE , ASC et DTF , BSC et ETF ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; donc l'angle $ASB = DTE$, $ASC = DTF$, $BSC = ETF$; donc les angles solides S et T ont les trois angles plans égaux chacun à chacun ; donc ils sont égaux. Il en résulte que les tétraèdres $SABC$, $TDEF$ ont un angle solide égal compris entre trois arêtes égales chacune à chacune et situées de la même manière ; donc ils sont égaux (19).

THÉORÈME XXIII.

Étant donnés quatre points A , B , C , D , non situés dans un même plan, on peut trouver un autre point également distant des quatre premiers, mais on n'en peut trouver qu'un seul.



1° Menons AB , AC , BC , AD ; au point O , centre du cercle circonscrit au triangle ABC , élevons la droite OH perpendiculaire à son plan, et conduisons le plan MN perpendiculaire sur le milieu de AD : ce plan coupera la ligne OH en un point L ; car, si le plan MN contenait OH ou lui était parallèle, il serait perpendiculaire au plan

ABC (liv. I, 18); donc la droite AD, abaissée du point A perpendiculairement au plan MN, serait située tout entière dans le plan ABC (liv. I, 20) et, par suite, les quatre points A, B, C, D seraient dans un même plan, ce qui est contre la supposition.

Cela posé, le point L, appartenant à la droite OH, est également distant des points A, B, C (liv. I, 31); ce même point L, appartenant au plan MN, est également distant des points A et D (liv. I, 32); donc les quatre distances LA, LB, LC, LD sont égales entre elles; donc L est le point demandé.

2° L est le seul point également distant de A, B, C, D. Car tout point également distant de ces quatre points appartient à la fois à la droite OH (liv. I, 31) et au plan MN (liv. I, 32) qui se rencontrent au seul point L.

COROLLAIRE 1. *On peut trouver un point également distant des quatre sommets d'un tétraèdre, mais on n'en peut trouver qu'un seul.*

COROLLAIRE 2. *Les six plans perpendiculaires aux milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point. Car chacun de ces plans passe par le point également distant des quatre sommets (liv. I, 32).*

THÉORÈME XXIV.

Un tétraèdre SABC étant donné, on peut trouver, dans l'intérieur, un point également distant des quatre faces; mais on n'en peut trouver qu'un seul.



1° Divisons en deux parties égales chacun des trois angles dièdres SA, SB, AB, adjacents à une même face ASB: les deux premiers plans bissecteurs se rencontrent suivant une droite SD (liv. I, 1); le troisième coupe SD en un point O (ax. 9) qui est le point demandé.

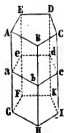
En effet, le point O , appartenant à la ligne SD , est également distant des trois faces ASB , ASC , BSC de l'angle solide S (18); ce même point O , appartenant au plan bissecteur ABO , est également distant des deux faces ASB , ABC de l'angle dièdre AB (liv. 1, 33); donc il est également distant des quatre faces du tétraèdre $SABC$.

2° O est le seul point intérieur également distant des quatre faces. Car tout point intérieur également distant des quatre faces appartient à la fois à la droite SD (18) et au plan ABO (liv. 1, 33) qui se rencontrent au seul point O .

COROLLAIRE. *Les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.* Car chacun de ces plans passe par le point également distant des quatre faces (liv. 1, 33).

THÉORÈME XXV.

Dans tout prisme, les bases et les sections faites par des plans parallèles aux bases sont des polygones égaux.

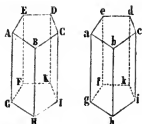


En effet, les angles EAB , FGH , ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun et dirigés dans le même sens, sont égaux entre eux (liv. 1, 6); par la même raison, $ABC = GHI$, $BCD = HIK$, etc., d'ailleurs les côtés AB , GH sont égaux, comme opposés dans un parallélogramme; on a de même $BC = HI$, $CD = IK$, etc.; donc les polygones $ABCDE$, $FGHIK$ ont les angles égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les côtés homologues égaux; donc ils sont égaux. On prouverait de même que a section $abcde$ parallèle aux bases est égale au polygone $ABCDE$.

COROLLAIRE. Dans tout parallélépipède, les faces opposées sont égales (déf. 22, rem. 3).

THÉORÈME XXVI.

Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle dièdre, à la base, égal et compris entre deux faces égales chacune à chacune et situées de la même manière.



Soit l'angle dièdre $GH = gh$, la base $FGHIK = fg hik$, et la face latérale $AGHB = aghb$.

Plaçons la première figure sur la seconde, de manière que la base $FGHIK$ coïncide avec $fg hik$. Puisque l'angle dièdre $GH = gh$, le plan de la face $AGHB$ coïncidera avec celui de

la face $aghb$; de plus, puisque ces deux faces sont égales, l'angle $AGH = agh$ et l'arête $AG = ag$; donc ces deux arêtes coïncideront, et le point A tombera au point a ; par la même raison, l'arête BH coïncidera avec bh , et le point B tombera au point b ; cela étant, l'arête CI , parallèle à BH , coïncidera avec l'arête ci , parallèle à bh (liv. I, 2, cor.) et le point C tombera au point c , et ainsi de suite, quel que soit le nombre des arêtes latérales; donc les deux prismes coïncideront dans toute leur étendue; donc ils sont égaux.

COROLLAIRE 1. Deux prismes droits, de même base et de même hauteur, sont égaux.

COROLLAIRE 2. Tous les cubes, qui ont un côté égal, sont égaux (g. pl. liv. II, 15, cor. 2).

REMARQUE. On voit, par la démonstration précédente, que, $3n$ désignant le nombre des arêtes de chacun des prismes proposés, leur égalité n'exige que $2n$ conditions. Mais, si l'on considère un polyèdre terminé latéralement par n

quadrilatères et, d'autre part, par deux polygones de n côtés, on trouve que n conditions sont nécessaires pour que ce polyèdre soit un prisme ou, autrement, pour que les n faces latérales soient des parallélogrammes. C'est ainsi que le nombre des conditions nécessaires pour l'égalité de deux prismes de même espèce (déf. 36) se réduit aux deux tiers du nombre des arêtes de chaque prisme, tandis que l'égalité de deux pyramides, de même espèce, exige un nombre de conditions égal à celui des arêtes de chaque pyramide (20, rem.).

THÉORÈME XXVII.

Dans tout parallélépipède, 1° les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales; 2° la somme des carrés des diagonales est égale à celle des carrés des arêtes.



1° Soient les diagonales AH, CF. Menons AC et FH : dans le quadrilatère AFHC, les côtés opposés AF, CH sont égaux et parallèles; donc la figure est un parallélogramme, et les diagonales AH, CF se coupent mutuellement en deux parties égales. Or ces deux diagonales ont été prises arbitrairement; donc les quatre diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales et en un même point O.

2° Dans le parallélogramme ACHF, on a $\overline{AH}^2 + \overline{CF}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{AC}^2$ (g. pl. liv. v, 22); dans le parallélogramme DEGB, on a, de même, $\overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{DE}^2 + 2\overline{BD}^2$, ou $2\overline{AF}^2 + 2\overline{BD}^2$; donc $\overline{AH}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 = 4\overline{AF}^2 + 2\overline{AC}^2 + 2\overline{BD}^2$; or, dans le parallélogramme ABCD,

$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2$; donc $2\overline{AC}^2 + 2\overline{BD}^2 = 4\overline{AB}^2 + 4\overline{AD}^2$; donc enfin $\overline{AH}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 = 4\overline{AF}^2 + 4\overline{AB}^2 + 4\overline{AD}^2$, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1. Soient A, B, C les trois côtés d'un parallélépipède rectangle et D sa diagonale. On aura $\frac{1}{4}D^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2$ ou $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$; donc *le carré de la diagonale d'un parallélépipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois côtés.*

COROLLAIRE 2. Lorsque $A = B = C$, le parallélépipède est un cube, et l'égalité précédente se réduit à $D^2 = 3A^2$, d'où l'on tire $D : A :: \sqrt{3} : 1$; donc *le rapport de la diagonale d'un cube à son côté est égal à la racine carrée de 3.*

THÉORÈME XXVIII.

Dans tout polyèdre, le nombre des sommets augmenté du nombre des faces est égal au nombre des arêtes augmenté de deux unités.



Soit ABCDEF une des faces du polyèdre proposé, BCGHI une seconde face adjacente à la première, GCDK une troisième face adjacente aux deux premières ou à l'une d'elles. Appelons a le nombre des côtés du polygone ABCDEF et s le nombre de ses sommets, a' et s' les nombres de côtés et de sommets de BCGHI, non communs à ce polygone et au premier, a'' et s'' les nombres de côtés et de sommets de GCDK, non communs à ce polygone et à l'un des précédents, etc., on aura les relations (1) $a = s$, (2) $a' = s' + 1$, (3) $a'' = s'' + 1$, etc., en supposant que les polygones dont il s'agit forment une surface convexe, non fermée et terminée à un seul contour. Soit S le nombre des sommets de cette surface, F le nombre des polygones qui la composent, et A celui de ses arêtes ou

côtés. Ajoutant toutes les égalités (1), (2), (3), etc., qui sont en nombre égal à F , et observant que $a + a' + a'' + \text{etc.} = A$, $s + s' + s'' + \text{etc.} = S$, on aura la relation $A = S + F - 1$ ou $S + F = A + 1$; donc *dans tout polyèdre convexe, non fermé* (déf. 11, rem.) *et terminé à un seul contour, le nombre des sommets augmenté de celui des faces est égal au nombre des arêtes augmenté d'une unité.*

Cela étant, supposons que S , F et A désignent actuellement les nombres de sommets, de faces et d'arêtes d'un polyèdre fermé. Si l'on supprime une face dans ce polyèdre, on obtiendra un polyèdre ouvert, terminé à un seul contour, et dont les nombres de sommets, de faces et d'arêtes seront S , $F - 1$ et A . Donc, en vertu de ce qui précède, on aura l'égalité $S + (F - 1) = A + 1$ et, par suite, $S + F = A + 2$, ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. Soient P et P' deux polyèdres de même espèce (déf. 36), S , F et A les nombres de sommets, de faces et d'arêtes de chaque polyèdre, et n , n' , $n'' \dots$ les nombres de côtés de leurs faces homologues ou situées de la même manière. Afin de déterminer le nombre des conditions nécessaires pour l'égalité de ces deux polyèdres, supposons-les placés de manière qu'ils aient une face commune, de n côtés, et qu'ils soient situés d'un même côté du plan de cette face. Cette situation, supposant l'égalité de deux polygones de n côtés, exige $2n - 3$ conditions (g. pl. liv. II, 7 et 9): de plus, pour que P et P' coïncident, il faut que les $S - n$ autres sommets de P aient la même position que les $S - n$ sommets homologues de P' ; or la coïncidence de deux sommets situés hors du plan de la face commune exige 3 conditions (20); donc on aura $3 \times (S - n)$ ou $3S - 3n$ conditions qui, jointes aux $2n - 3$ conditions précédentes, donnent $(3S - n - 3)$ conditions. Mais, lorsque deux faces homologues, de plus de trois côtés, ont trois sommets communs, les autres sommets de ces faces sont nécessairement situés dans un même plan; d'où il résulte que le nombre des conditions, précédemment obtenues, doit être diminué de

$(n'-3) + (n''-3) + (n'''-3) + \text{etc.}$, ou de $2A - n - 3 \times (F-1)$, ce qui réduit le nombre demandé à $3S + 3F - 2A - 6$; or $S + F = A + 2$, donc $3S + 3F = 3A + 6$ et $3S + 3F - 2A - 6 = A$. On voit que le nombre des conditions nécessaires, pour l'égalité de deux polyèdres de même espèce, est égal au nombre A des arêtes de chaque polyèdre.

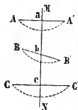
THÉORÈME XXIX.

La somme des angles plans de toutes les faces d'un polyèdre est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a de sommets moins deux dans le polyèdre.

Soient S , F et A les nombres de sommets, de faces et d'arêtes d'un polyèdre. Si l'on désigne par n ; n' , n'' , etc., les nombres de côtés de ces différentes faces, par s la somme de tous leurs angles plans, et qu'on prenne l'angle droit pour unité, on aura $s = (2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \text{etc.}$ (g. pl. liv. II, 6), ou $s = 2(n + n' + n'' + \text{etc.}) - 4F$. Or, chaque arête du polyèdre étant un côté commun à deux faces, on a $n + n' + n'' + \text{etc.} = 2A$; donc $s = 4A - 4F = 4(A - F)$; mais la relation $S + F = A + 2$ (28) donne $A - F = S - 2$; donc $s = 4(S - 2)$.

THÉORÈME XXX.

Deux polygones ou polyèdres P et P' , symétriques par rapport à une droite MN , sont égaux entre eux.



Soient A , B , C , etc., les sommets du polygone ou polyèdre P , et A' , B' , C' , etc., les sommets homologues de P' . Concevons que la figure P fasse une demi-révolution autour de MN (déf. 49) : dans ce mouvement, le point A décrira une demi-circonférence et viendra tomber en A' ; en même temps, le point B tombera en B' , le point C

en C' , etc.; donc les deux figures P et P' coïncideront; donc elles sont égales.

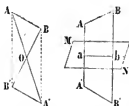
REMARQUE 1. On prouverait de même que *deux angles, symétriques par rapport à une droite, sont égaux entre eux.*

REMARQUE 2. Il suit de là qu'il n'y a pas lieu de considérer les propriétés relatives de deux polyèdres symétriques par rapport à une droite. Aussi, lorsqu'il sera question de polyèdres *symétriques*, sans aucune indication de centre, d'axe ni de plan de symétrie, on entendra toujours parler de deux polyèdres susceptibles d'être placés de manière que leurs sommets soient symétriques par rapport à un point ou à un plan.

Il en sera de même des polygones et des angles symétriques.

THÉORÈME XXXI.

Deux droites AB , $A'B'$, symétriques par rapport à un point O ou à un plan MN , sont égales entre elles.



1° On a, par hypothèse, $OA = OA'$, $OB = OB'$ (déf. 43); donc les côtés opposés AB , $A'B'$ du quadrilatère $ABA'B'$ sont égaux entre eux (g. pl. liv. II, 19).

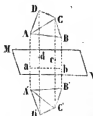
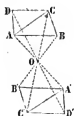
2° En vertu de la supposition, les droites AA' , BB' sont perpendiculaires à MN et divisées par ce plan en deux parties égales aux points a et b ; donc chacun des angles Aab , Bba est droit. Cela posé, plaçons le trapèze $AabB$ sur le trapèze $A'abB'$ de manière que le côté ab reste commun aux deux figures; puisque l'angle droit $Aab = A'ab$, la droite aA coïncidera avec aA' , qui lui est égale, et le point A tombera en A' ; par la même raison, le point B tombera en B' ; donc AB coïncidera avec $A'B'$; donc ces deux droites sont égales.

COROLLAIRE. Dans deux polygones ou polyèdres symétriques, les droites qui joignent des sommets homologues (déf. 44) sont égales.

REMARQUE. Les trapèzes $AabB$, $A'a'b'B'$ étant égaux, les droites AB , $A'B'$ font le même angle avec ab et, par suite, avec le plan MN (liv. I, 28, rem.); donc deux droites, symétriques par rapport à un plan, font des angles égaux avec ce plan.

THÉORÈME XXXII.

Deux triangles ABC , $A'B'C'$ et en général deux polygones $ABCD$, $A'B'C'D'$, symétriques par rapport à un point O ou à un plan MN , sont égaux entre eux.



1° En effet, les droites AB , $A'B'$, symétriques par rapport au point O ou au plan MN , sont égales (31); on a de même $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; donc le triangle ABC est égal au triangle $A'B'C'$.

On voit, par la même démonstration, que deux angles ABC , $A'B'C'$, symétriques par rapport à un point O ou à un plan MN , sont égaux.

2° Prouvons d'abord que, si les quatre sommets A, B, C, D sont situés dans un même plan, les sommets homologues A', B', C', D' seront aussi dans un même plan.

Car, si l'on mène les diagonales AC , $A'C'$, on aura (1°) l'angle $BAD = B'A'D'$, $BAC = B'A'C'$, $CAD = C'A'D'$; mais, puisque les points A, B, C, D sont dans un même plan, l'angle $BAD = BAC + CAD$; donc $B'A'D' = B'A'C' + C'A'D'$; donc les quatre points A', B', C', D' sont

aussi dans un même plan; sans quoi, A' serait le sommet d'un angle trièdre dans lequel on aurait $B'A'D' < B'A'C' + C'A'D'$ (11).

Cela posé, les deux polygones $ABCD$, $A'B'C'D'$, ayant les angles A et A' , B et B' , etc., égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les côtés homologues égaux, sont égaux entre eux.

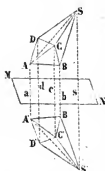
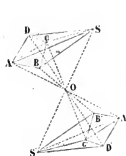
COROLLAIRE 1. *Deux polyèdres et deux angles solides, symétriques, ont les angles plans homologues égaux* (déf. 45 et 47).

COROLLAIRE 2. *Deux polyèdres symétriques ont les faces homologues égales* (déf. 45).

REMARQUE. Les droites AB , $A'B'$ se rencontrent en un point de ab , sur le plan MN (31, rem.); il en est de même des droites AC , $A'C'$; donc l'intersection des plans ABC , $A'B'C'$ est située dans le plan MN . Cela étant, si, du pied a de AA' , on abaisse une perpendiculaire aP sur cette intersection, et qu'on mène les droites AP , $A'P$, les triangles rectangles AaP , $A'aP$ auront un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle $aPA = aPA'$; or ces deux angles correspondent aux angles dièdres que fait le plan MN avec les plans ABC , $A'B'C'$ (liv. 1, 14); donc les plans de deux polygones $ABCD$, $A'B'C'D'$, symétriques par rapport à un plan MN , font des angles égaux avec le plan de symétrie.

THÉORÈME XXXIII.

Deux angles trièdres $SABC$, $S'A'B'C'$, et en général deux angles polyèdres $SABCD$, $S'A'B'C'D'$, symétriques par rapport à un point O ou à un plan MN , ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse.



1° Les angles trièdres $SABC$, $S'A'B'C'$ ont l'angle plan $ASB = A'S'B'$, $ASC = A'S'C'$, $BSC = B'S'C'$ (32, cor. 1); donc l'angle dièdre $SA = S'A'$, l'angle dièdre $SB =$

$S'B'$ et l'angle dièdre $SC = S'C'$ (6). D'ailleurs, si l'on place la figure $SABC$ sur $S'A'B'C'$ de manière que l'angle plan ASB coïncide avec $A'S'B'$, l'arête SA coïncidera avec $S'B'$ et l'arête SB avec $S'A'$: alors les angles dièdres égaux SA et $S'A'$, SB et $S'B'$ n'auront pas d'arête commune; donc ils sont situés dans un ordre inverse.

2° Menons les plans SAC , $S'A'C'$ qui décomposent les angles solides proposés en des angles trièdres $SABC$ et $S'A'B'C'$, $SACD$ et $S'A'C'D'$ symétriques par rapport au point O ou au plan MN . En vertu de ce qui précède, l'angle dièdre $SB = S'B'$, l'angle dièdre $BASC = B'A'S'C'$ et l'angle dièdre $DASC = D'A'S'C'$; donc l'angle dièdre total SA est égal à l'angle dièdre total $S'A'$: on a, de même, l'angle dièdre $SD = S'D'$, et ainsi de suite.

COROLLAIRE. Deux polyèdres symétriques ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse.

REMARQUE. Deux polyèdres P et P' , symétriques l'un de l'autre, sont décomposables en un même nombre de pyramides triangulaires symétriques.

En effet, si, par un même sommet S du polyèdre P et chacune des arêtes non situées dans les faces qui se rencontrent au point S , on conduit un plan, ce polyèdre sera décomposé en pyramides qui auront pour sommet commun le point S et pour bases les différentes faces du polyèdre à

l'exception de celles qui forment l'angle solide S . Cela étant, concevons qu'on fasse la même décomposition dans le polyèdre P' , en menant des plans par le sommet S' homologues à S : les polyèdres P et P' seront ainsi partagés en un même nombre de pyramides symétriques ; car ces pyramides auront leurs sommets symétriques par rapport au centre ou au plan de symétrie des polyèdres dont elles font partie (déf. 44).

Soient $SABCD$, $S'A'B'C'D'$ deux quelconques de ces pyramides ; si l'on mène les diagonales AC , $A'C'$, et les plans SAC , $S'A'C'$, les pyramides triangulaires $SABC$ et $S'A'B'C'$, $SACD$ et $S'A'C'D'$, ayant leurs sommets symétriques par rapport au point O ou au plan MN , seront symétriques par rapport à ce point ou à ce plan ; donc, en définitive, les polyèdres P et P' auront été décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires symétriques.

THÉORÈME XXXIV.

Deux angles solides S et s , symétriques d'un troisième S' et deux polyèdres P et p , symétriques d'un troisième P' , sont égaux entre eux.

1° S et S' , étant symétriques l'un de l'autre, ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse (33), et les angles plans homologues égaux (32, cor. 1). Par la même raison, s et S' ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse, et les angles plans homologues égaux ; donc S et s ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les angles plans homologues égaux ; donc ils sont égaux (2, rem. 2).

2° P et P' , étant symétriques l'un de l'autre, ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse (33, cor.), et les faces homologues égales (32, cor. 2) ; par la

même raison, p et P' ont les angles dièdres homologues égaux et situés dans un ordre inverse, et les faces homologues égaux; donc P et p ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues égaux; donc ils sont susceptibles de coïncider et, par suite, égaux entre eux.

THÉORÈME XXXV.

Dans tout parallélépipède $ABCDEFGH$, 1° les angles solides opposés sont symétriques l'un de l'autre; 2° le plan $BGED$, conduit par deux arêtes latérales opposées, divise le solide en deux prismes triangulaires symétriques l'un de l'autre.



1° Soient, par exemple, les deux angles solides A et H . Menons les diagonales AH , BE , DG , FC qui se rencontrent au même point O et sont divisées par ce point en deux parties égales (27), de sorte qu'on a $OA = OH$, $OB = OE$, $OD = OG$, $OF = OC$; donc les sommets A et H des deux angles solides, et les extrémités B et E , D et G , F et C des droites AB et EH , AD et GH , AF et CH , prises sur leurs arêtes à partir des sommets, sont symétriques par rapport au point O ; donc les angles solides A et H sont symétriques l'un de l'autre par rapport à ce point (déf. 46).

2° Les deux prismes $ABDEFG$, $BCDEGH$, ayant leurs sommets A et H , B et E , D et G , E et B , etc., symétriques par rapport au point O , sont symétriques par rapport à ce point (déf. 42).

REMARQUE. On voit aussi que les pyramides $OABCD$ et $OEFHG$, $OABGF$ et $OCDEH$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point O .

LIVRE III.

LES TROIS CORPS RONDS.

DÉFINITIONS.



1. La *sphère* peut être considérée comme un solide engendré par un demi-cercle ACB qui fait une révolution entière autour de son diamètre AB (princ. déf. 22).

Dans ce mouvement, la demi-circonférence ACB décrit la surface de la sphère.

2. Toute droite, qui a ses extrémités sur la surface de la sphère, est une *corde*.

3. Toute corde, qui passe par le centre de la sphère, est un *diamètre*.

REMARQUE. Tous les diamètres de la sphère sont doubles du rayon et, par suite, égaux entre eux.

4. La section faite dans la sphère, par un plan qui passe par le centre, est un *grand cercle*.

5. Le quart de la circonférence d'un grand cercle s'appelle *quadrant*.

6. La section faite dans la sphère, par un plan qui ne passe pas par le centre, est un *petit cercle*.

7. On nomme *pôle* d'un cercle de la sphère, un point de la surface, tel que tous les arcs de grand cercle, menés de ce point à la circonférence du cercle proposé, sont égaux entre eux.

8. *Décrire une circonférence, d'un point pris sur la surface de la sphère, comme pôle, avec une corde égale à une droite donnée*, c'est tracer, sur la surface de cette sphère, une circonférence telle que toutes les cordes, menées de ce point à la circonférence, soient égales à la droite donnée.

9. L'angle de deux arcs AB, AC, qui se rencontrent sur



la sphère, est l'angle SAT des tangentes menées à ces arcs par leur point de rencontre.

Ce point est le *sommet* de l'angle. Les arcs AB, AC en sont les *côtés*.

10. On nomme *fuseau sphérique*, la partie de la surface de la sphère, comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle, terminées aux extrémités d'un même diamètre.

11. L'angle d'un fuseau est celui des deux arcs qui le terminent.

12. On nomme *onglet sphérique*, la partie de la sphère comprise entre deux plans qui se rencontrent suivant un diamètre.

13. L'angle de ces plans est l'angle de l'onglet.

14. La partie de la surface d'une sphère, terminée par plus de deux arcs de grand cercle, s'appelle *polygône sphérique*.

Ces arcs sont les *côtés* du polygône. On les supposera toujours plus petits qu'une demi-circonférence.

15. Un angle solide et un polygône sphérique sont *correspondants* l'un à l'autre, lorsque l'angle solide a pour arêtes les rayons menés aux sommets du polygône.

16. Un triangle sphérique est *rectangle*, *isosceèle*, *équilatéral*, dans les mêmes cas qu'un triangle rectiligne.

17. Un triangle sphérique est *birectangle* ou *trirectangle*, selon qu'il a deux ou trois angles droits.

18. Un triangle sphérique est *polaire* d'un autre triangle, lorsque les sommets du premier sont les pôles des côtés du second.

REMARQUE. On suppose qu'on prend pour pôle de chaque côté d'un triangle, celui qui est situé sur le même hémisphère que ce triangle, par rapport à la circonférence dont ce côté fait partie.

19. La *pyramide sphérique* est un solide compris sous un polygône sphérique, et les secteurs circulaires qui ont pour bases les différents côtés du polygône et pour sommet commun le centre de la sphère.

20. Ce polygône est la *base* de la pyramide. Le centre de la sphère en est le *sommet*.

21. Une pyramide sphérique est *birectangle* ou *trirectangle*, selon que sa base est un triangle birectangle ou trirectangle.

22. Tout polygône sphérique, situé entièrement d'un même côté du plan de l'un quelconque de ses côtés, est *convexe*.

Ainsi, tout polygône sphérique, correspondant à un angle solide convexe, est un polygône convexe.

23. Une pyramide sphérique est *convexe*, lorsqu'elle a pour base un polygône convexe.

24. Deux polygônes sphériques, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont *symétriques* l'un de l'autre, lorsqu'ils correspondent à des angles solides symétriques.

25. Deux pyramides sphériques, situées dans la même sphère ou dans des sphères égales, sont *symétriques* l'une de l'autre, lorsqu'elles ont pour bases des polygônes symétriques.

26. Une droite est *inscrite* dans une sphère, lorsqu'elle a ses extrémités sur la surface de la sphère.

27. Un polyèdre *inscrit*, est celui dont tous les côtés sont inscrits dans la sphère.

28. Une sphère est *circonscrite* à un polyèdre, quand le polyèdre est inscrit dans la sphère.

29. Une ligne droite et une sphère sont *tangentes*, lorsqu'elles ont un seul point commun.

30. Un plan est *tangent* à une sphère, lorsqu'il rencontre sa surface en un seul point.

31. Une ligne droite est *normale* ou *oblique* à une sphère, en un point de sa surface, selon qu'elle est perpendiculaire ou oblique au plan tangent mené par ce point.

32. Deux sphères sont *tangentes*, lorsque leurs surfaces ont un seul point commun.

33. Un polyèdre est *circonscrit* à une sphère, lorsque chaque face du polyèdre est tangente à la sphère.

34. Une sphère est *inscrite* dans un polyèdre, lorsque le polyèdre est circonscrit à la sphère.

35. On appelle *zone*, la partie de la surface d'une sphère, comprise entre deux plans parallèles.

36. Les *bases* d'une zone sont les deux circonférences qui la terminent.

REMARQUE. Lorsqu'un des deux plans parallèles est tangent à la sphère, la zone n'a qu'une base.

37. On nomme *segment sphérique*, la partie de sphère, comprise entre deux plans parallèles.

38. Les *bases* d'un segment sont les deux cercles qui le terminent.

REMARQUE. Lorsqu'un des deux plans parallèles est tangent à la sphère, le segment n'a qu'une base.

39. La *hauteur* d'une zone ou d'un segment sphérique est la distance des deux plans parallèles qui comprennent la zone ou le segment.

40. Le *cylindre* est un solide engendré par un rectangle ABCD qui fait une révolution entière autour d'un de ses côtés.



41. Le côté immobile AB est l'*axe* du cylindre.

42. Les *bases* du cylindre sont les cercles décrits par les côtés AD, BC, perpendiculaires à l'axe.

43. La *hauteur* du cylindre est la distance des deux bases.

44. La *surface latérale* du cylindre est la surface décrite par le côté CD parallèle à l'axe.

45. Le *cône* est un solide engendré par un triangle rectangle AOS qui fait une révolution entière autour d'un des côtés de l'angle droit.



46. Le côté immobile SO est l'*axe* ou la *hauteur* du cône.

47. La *base* du cône est le cercle engendré par le côté AO perpendiculaire à l'axe.

48. Le *côté* du cône est l'hypoténuse du triangle générateur.

49. Le *sommet* du cône est le point de rencontre de la hauteur et du côté.

50. La *surface latérale* d'un cône est la surface décrite par l'hypoténuse SA du triangle générateur.

51. Un plan est *tangent* au cylindre ou au cône, lorsqu'il rencontre la surface du solide suivant une seule génératrice.

THÉORÈME PREMIER.

Le centre O de la sphère est le seul point duquel on puisse mener à des points de la surface, non situés dans un même plan, plus de trois droites égales entre elles.



Car si les droites PA, PB, PC, PD, menées d'un point P, autre que le centre de la sphère, à des points de la surface non situés dans un même plan, étaient égales entre elles, il y aurait deux points O et P situés chacun à égale distance des quatre points A, B, C, D; ce qui est impossible (liv. II, 23).

COROLLAIRE. Une sphère n'a qu'un seul centre.

THÉORÈME II.

Toute section, faite dans la sphère par un plan, est un cercle.



1° Soit ABC une section faite par un plan qui passe par le centre. Toutes les droites OA, OB, OC, etc., menées au contour de la section, sont égales entre elles (princ. déf. 22); donc la surface ABC est un cercle qui a même centre et même rayon que la sphère.

2^e Soit ABC une section qui ne contient pas le centre de la sphère. Abaissons la perpendiculaire OP sur le plan de la section; puis, menons les rayons OA, OB, OC, etc., à différents points de son contour : tous ces rayons sont des obliques égales; donc $PA = PB = PC$, etc. (liv. 1, 29, cor.); donc la surface ABC est un cercle décrit du point P, comme centre, avec le rayon $PA < OA$.

COROLLAIRE 1. *Tous les grands cercles sont égaux entre eux.* Car ils ont pour rayon celui de la sphère.

COROLLAIRE 2. *Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales.* Car leur intersection est un diamètre commun aux deux cercles.

COROLLAIRE 3. *La droite, qui joint le centre de la sphère à celui d'un petit cercle, est perpendiculaire au plan du cercle.*

COROLLAIRE 4. *Par deux points A et B, pris sur la surface de la sphère, on peut faire passer une circonférence de grand cercle.* Car on peut faire passer un plan par ces deux points et le centre de la sphère (ax. 3).

REMARQUE 1. Lorsque les points A et B sont en ligne droite avec le centre de la sphère, on peut faire passer une infinité de grands cercles par ces deux points; mais, dans le cas contraire, on n'en peut faire passer qu'un (princ. 1).

REMARQUE 2. Lorsqu'il sera question de l'arc de grand cercle qui joint deux points A et B, non situés aux extrémités d'un même diamètre de la sphère, on entendra parler du plus petit des deux arcs de grand cercle, qui se terminent à ces deux points.

THÉORÈME III.

Une ligne droite, menée comme on voudra, ne peut rencontrer la surface de la sphère en plus de deux points.

Par cette droite et un point intérieur à la sphère, menons

un plan, qui coupera la sphère suivant un cercle (2). La droite proposée, étant située tout entière dans ce plan, ne peut rencontrer la surface de la sphère qu'en des points de la circonférence du cercle, c'est-à-dire en plus de deux points (g. pl. liv. III, 1).

REMARQUE. On voit de même que toute corde est intérieure à la sphère, et que le diamètre est la plus grande ligne droite qu'on puisse inscrire dans la sphère (g. pl. liv. III, 1 et 10).

THÉORÈME IV.

Tout plan BAC, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OA, est tangent à la sphère; et réciproquement, le rayon OA, mené au point de contact, est perpendiculaire au plan tangent.



1° Toute oblique OD étant plus grande que la perpendiculaire OA (liv. I, 28), le point D est situé hors de la sphère; donc le plan BAC n'a que le point A commun avec la surface de la sphère; donc il est tangent.

2° Puisque le plan BAC est tangent, tous ses points, excepté A, sont situés hors de la sphère; donc si l'on mène, du point O au plan BAC, une droite OD différente de OA, on aura $OA < OD$; donc OA est perpendiculaire au plan BAC (liv. I, 28).

REMARQUE. On prouverait de même que toute droite, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangente à la sphère; et que, réciproquement, le rayon, mené au point de contact d'une tangente à la sphère, est perpendiculaire sur la tangente.

COROLLAIRE I. Par un point A, situé sur une sphère, on ne peut mener qu'un seul plan tangent. Car si l'on pouvait

en mener deux, ils seraient perpendiculaires à l'extrémité du même rayon OA , ce qui est impossible (liv. I, 8).

COROLLAIRE 2. *Toutes les tangentes à la sphère, menées par un même point A , sont situées dans le plan tangent en ce point (liv. I, 8, cor. 2).*

COROLLAIRE 3. *Toute droite, menée par le centre, est une normale à la sphère (déf. 31); et réciproquement, toute normale à la sphère passe par le centre (liv. I, 10).*

COROLLAIRE 4. *La perpendiculaire, abaissée du centre sur le plan tangent, passe par le point de contact (liv. I, 12).*

COROLLAIRE 5. *Deux plans tangents aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles (liv. I, 9, cor. 1); et réciproquement, lorsque deux plans tangents sont parallèles, la corde qui joint les points de contact est un diamètre (g. pl. liv. III, 4).*

THÉORÈME V.

Tout grand cercle ACB divise la sphère et sa surface en deux parties égales.



En effet, si l'on place la zone $MACB$ sur la zone $NACB$, de manière que la circonférence ACB soit commune aux deux figures, tous les points de la zone $MACB$, étant situés à une distance du centre O égale au rayon de la sphère, tomberont sur la zone $NACB$ (princ. th. 5. rem.).

THÉORÈME VI.

Dans la même sphère ou dans des sphères égales, deux cordes égales AB , DE sont également éloignées du centre; et réciproquement.



Soient O et C les centres des deux sphères; la perpendiculaire OP , sur AB , est égale à la perpendiculaire CQ , sur DE .

Menons les plans AOB , CDE qui couperont les sphères suivant des cercles de même rayon (2) : les cordes égales AB , DE sont également éloignées des centres O et C de ces deux cercles (g. pl. liv. III, 13); donc $OP = CQ$.

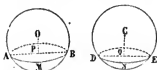
On prouverait de même que, lorsque la perpendiculaire $OP = CQ$, la corde $AB = DE$.

COROLLAIRE. Dans la même sphère ou dans des sphères égales, deux cercles égaux AMB , DNE sont également éloignés du centre; et réciproquement. Car soient P et Q les centres des deux cercles, AB et DE leurs diamètres; menons OP et CQ . La droite OP est perpendiculaire au plan AMB (2, cor. 3) et, par suite, au diamètre AB ; pareillement, la droite CQ est perpendiculaire au plan DNE et au diamètre DE ; or $AB = DE$, par hypothèse; donc la distance $OP = CQ$.

Ou prouverait de même que, lorsque la distance $OP = CQ$, le cercle AMB est égal au cercle DNE .

THÉORÈME VII.

Dans la même sphère ou dans des sphères égales, de deux cordes inégales la plus grande est la moins éloignée du centre; et réciproquement.



Soit $AB > DE$; on aura $OP < CQ$.

Car, en faisant la même construction que dans le théorème précédent, on aura, dans des cercles égaux, la corde $AB > DE$ et, par suite, $OP < CQ$ (g. pl. liv. III, 14).

On prouverait de même que, lorsque la distance OP est plus petite que CQ , la corde AB est plus grande que DE .

COROLLAIRE. *Dans la même sphère ou dans des sphères égales, de deux cercles inégaux le plus grand est le moins éloigné du centre; et réciproquement.*

THÉORÈME VIII.

Étant donnés quatre points A, B, C, D non dans un même plan, on peut décrire une sphère qui passe par ces points; mais on n'en peut décrire qu'une.



1° Soit O le point également distant des quatre points donnés A, B, C, D (liv. II, 23) : si l'on décrit une sphère qui ait le point O pour centre et OA pour rayon, la surface de cette sphère contiendra les points A, B, C, D .

2° Supposons qu'une seconde sphère passe par les points A, B, C, D : son centre sera situé au point O , qui est également distant de ces quatre points (liv. II, 23) ; donc les deux sphères, ayant même centre et même rayon, ne formeront qu'une seule et même sphère.

COROLLAIRE. *On peut circonscrire une sphère à un tétraèdre $ABCD$; mais on n'en peut circonscrire qu'une.*

THÉORÈME IX.

Dans toute pyramide triangulaire $SABC$, on peut inscrire une sphère; mais on n'en peut inscrire qu'une.

1° Soit O le point situé dans l'intérieur de la pyramide à égale distance de ses faces (liv. II, 24) : abaissons de ce

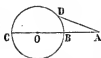


point les perpendiculaires OM , ON , OP , OQ sur les plans SAB , SAC , SBC , ABC ; on aura $OM = ON = OP = OQ$; donc, si l'on décrit une sphère qui ait pour centre le point O et OM pour rayon, elle passera par les points M , N , P , Q et sera la sphère demandée; car chacune des faces de la pyramide, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangente à la sphère (4).

2° Supposons qu'une seconde sphère soit inscrite dans la pyramide $SABC$. Les rayons menés du centre de cette sphère aux points de contact seront perpendiculaires aux quatre faces (4); donc elle aura pour centre le point O qui en est également distant (liv. II, 24); donc les deux sphères, ayant même centre et même rayon, ne formeront qu'une seule et même sphère.

THÉORÈME X.

D'un point A, situé hors d'une sphère : 1° on peut mener deux normales qui se terminent à la surface de la sphère ; 2° on n'en peut mener que deux.



1° La droite AO , menée par le point A et le centre de la sphère, rencontre sa surface en deux points B et C (ax. 11 et 5), et les droites AB , AC sont des normales (4, cor. 3).

2° Toute droite AD , menée par le point A dans une autre direction que AO , ne contient pas le centre de la sphère et, par suite, est une oblique (4, cor. 3); donc AB , AC sont les seules normales qu'on puisse mener du point A .

REMARQUE 1. On voit de même que : d'un point A , situé

entre le centre et la surface de la sphère, on peut mener deux normales, mais on n'en peut mener que deux.

REMARQUE 2. On prouverait aussi, comme en géométrie plaine (liv. III, 21), que : lorsque d'un point A, situé hors de la sphère, on mène une normale et différentes obliques extérieures à la sphère, et qu'on joint les pieds des obliques à celui de la normale, par des arcs de grand cercle : 1° la normale est plus courte que toute oblique ; 2° deux obliques, dont les pieds s'écartent également de la normale, sont égales ; 3° de deux obliques, celle dont le pied s'écarte le moins de la normale est la plus courte.

Il en serait de même des théorèmes relatifs au cas où la normale contient le centre du cercle, et à celui où le point A est situé entre le centre et la surface de la sphère (g. pl. liv. III, 21, rem.).

THÉORÈME XI.

Deux sphères, qui ont un point A commun sur la ligne des centres, sont tangentes, extérieurement ou intérieurement, selon que ce point est situé entre les deux centres ou sur un des prolongements de la droite OC qui les joint.

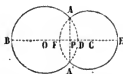


1° Joignons le centre O à un point quelconque B de la sphère CA. L'oblique OB est plus grande que la normale OA (10, rem. 2) ; donc le point B est extérieur à la sphère OA ; on prouverait de même que, à l'exception du point A, tout point D, pris sur la sphère OA, est extérieur à la sphère CA ; donc les deux sphères se touchent extérieurement.

2° La démonstration est la même que dans le cas de deux circonférences qui ont un point commun sur un des prolongements de la droite qui joint les centres (g. pl. liv. III, 22).

THÉORÈME XII.

Les surfaces de deux sphères, qui ont un point A commun hors de la ligne OC des centres, se coupent suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres, et qui a son centre sur cette ligne.



Menons le plan AOC qui coupe les sphères suivant les circonférences de grand cercle, ABD, AEF. Ces circonférences, se rencontrant au point A, auront un second point commun A' symétrique de A par rapport à OC (g. pl. liv. III, 23), et se couperont mutuellement en chacun de ces points (g. pl. liv. III, 29, cor.). Cela étant, menons la corde AA', perpendiculaire sur OC en un point P (g. pl. liv. III, 24), et concevons que les demi-cercles BAD, EAF tournent simultanément en faisant une révolution entière autour de OC; dans ce mouvement, les demi-circonférences BAD, EAF engendreront les surfaces des sphères et le point A décrira une circonférence commune à ces surfaces, qui aura pour centre le point P, la droite AP pour rayon, et dont le plan sera perpendiculaire à OC (liv. I, 8, cor. 2).

COROLLAIRE 1. *La ligne BMC, décrite sur la surface de la sphère par l'extrémité B d'une corde mobile AB, dont l'autre extrémité est fixe, est une circonférence qui a son plan perpendiculaire au diamètre AO, mené par cette extrémité. Car BMC peut être considérée comme l'intersection des surfaces de la*



sphère OA et d'une sphère qui aurait le point A pour centre et la corde AB pour rayon.

COROLLAIRE 2. *Lorsque deux sphères se touchent, soit in-*

térieurement, soit extérieurement, la ligne des centres passe par le point de contact. Car si le point de contact était situé hors de cette ligne, les deux sphères se couperaient, ce qui est contre la supposition.

REMARQUE. Les relations entre la distance des centres et les rayons de deux sphères tangentes extérieurement ou intérieurement, extérieures ou intérieures l'une à l'autre sans que leurs surfaces aient aucun point commun, ou qui se coupent, sont les mêmes que celles qui existent, dans les mêmes cas de positions relatives, entre la distance des centres et les rayons de deux cercles situés dans un même plan, et se démontrent de la même manière. Ainsi 1° *lorsque la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons, les deux sphères se touchent extérieurement ou intérieurement; et réciproquement* (g. pl. liv. III, 25 et 26). 2° *Lorsque la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ou plus petite que leur différence, les deux sphères sont extérieures ou intérieures l'une à l'autre sans que leurs surfaces aient aucun point commun; et réciproquement* (g. pl. liv. III, 27 et 28). 3° *Lorsque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux sphères se coupent; et réciproquement* (g. pl. liv. III, 29).

THÉORÈME XIII.

Tout cercle ACB de la sphère a deux pôles, qui sont les extrémités du diamètre PQ perpendiculaire à son plan.



En effet, le point P, appartenant à la perpendiculaire menée par le centre du cercle ACB à son plan (2, cor. 3), est également distant de tous les points A, B, C, etc., de la circonférence du cercle (liv. I, 31); donc les cordes PA, PB, PC, etc., sont

toutes égales entre elles; donc les arcs de grand cercle, PA , PB , PC , etc., sous-tendus par ces cordes, sont aussi égaux entre eux (g. pl. liv. III, 11); donc le point P est un pôle du cercle ACB (déf. 7).

On prouverait de même que le point Q est aussi un pôle de ce cercle.

REMARQUE. Tout point R de la surface de la sphère, situé hors du diamètre PQ , n'étant pas également distant de tous les points de la circonférence ACB (liv. I, 31), les arcs de grand cercle, menés de ce point à cette circonférence, ne sont pas tous égaux entre eux (g. pl. liv. III, 12); donc le point R n'est pas un pôle du cercle ACB ; donc P et Q sont les seuls pôles du cercle proposé.

COROLLAIRE 1. *Le plan de toute circonférence ABP de grand cercle, mené par l'un des pôles d'un cercle quelconque ACB , est perpendiculaire au plan de celui-ci.* Car le diamètre PQ perpendiculaire au plan ACB , ayant deux points O et P dans le plan ABP , y est situé tout entier.

COROLLAIRE 2. *Toute circonférence ABP de grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à celui d'un cercle quelconque ACB , contient les pôles de ce cercle.* Car le plan ABP contient le diamètre PQ perpendiculaire au plan ACB (liv. I, 20).

COROLLAIRE 3. *Deux cercles parallèles ont les mêmes pôles.* Car le diamètre de la sphère, perpendiculaire au plan de l'un des cercles, est perpendiculaire à l'autre (liv. I, 15).

COROLLAIRE 4. *Réciproquement, deux cercles, qui ont un pôle commun, sont parallèles.* Car leurs plans sont perpendiculaires au diamètre mené par ce pôle.

THÉORÈME XIV.

Tout arc de grand cercle, PA , mené du pôle d'un grand cercle ACB à sa circonférence, est un quadrant.

THÉORÈME XVI.

Par un point A, pris comme-on voudra, sur la surface de la sphère, on peut mener une circonférence de grand cercle, perpendiculaire à une circonférence de grand cercle donnée MNP.



Par la droite AO, qui joint le point A au centre de la sphère, menons un plan perpendiculaire à celui du cercle MNP (liv. I, 22); ce plan coupera la surface de la sphère, suivant une circonférence de grand cercle, ABC, qui sera perpendiculaire à la circonférence MNP (15).

REMARQUE. Lorsque le point A n'est pas l'un des pôles du cercle MNP, la droite AO est oblique au plan MNP (13), et la circonférence ABC est la seule qu'on puisse mener, par le point A, perpendiculairement à la circonférence donnée (liv. I, 22). Mais, lorsque le point A est un des pôles du cercle MNP, toute circonférence, menée par ce point, est perpendiculaire à MNP (liv. I, 18).

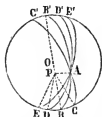
COROLLAIRE 1. *Lorsqu'un point A, pris sur la surface de la sphère, hors d'une circonférence de grand cercle, MNP, n'est pas l'un des pôles de cette circonférence, on peut abaisser, de ce point, deux arcs de grand cercle, AB, AC, perpendiculaires à cette circonférence; mais on n'en peut abaisser que deux.*

COROLLAIRE 2. *Tous les arcs de grand cercle, menés de l'un des pôles d'un grand cercle à sa circonférence, sont perpendiculaires à cette circonférence.*

THÉORÈME XVII.

Lorsqu'un arc AB de grand cercle, plus petit qu'un

quadrant, est mené d'un point *A*, pris sur la surface de la sphère, perpendiculairement à une circonférence de grand cercle, et qu'on mène, du même point, plusieurs arcs obliques *AC*, *AD*, *AE* : 1° l'arc perpendiculaire est plus court que tout arc oblique *AC* ; 2° deux arcs obliques *AC*, *AD*, dont les pieds s'écartent également de l'arc perpendiculaire, sont égaux ; 3° de deux arcs obliques *AC*, *AE*, celui, dont le pied s'écarte le moins de l'arc perpendiculaire, est le plus petit.



1° L'arc *AB* étant perpendiculaire à la circonférence *OB*, le pied de la perpendiculaire *AP*, abaissée du point *A* sur le plan de cette circonférence, est situé sur le diamètre *BB'* (liv. I, 20) ; donc la droite *PB* est normale à la circonférence *OB*, et les droites *PC*, *PD*, *PE* sont obliques à la même circonférence ; donc $PB < PC$ (g. pl. liv. III, 21) ; donc la corde *AB* est plus courte que la corde *AC* (liv. I, 28) et, par suite, l'arc *AB* est plus petit que l'arc *AC*.

2° Puisque $BC = BD$, l'oblique $PC = PD$ et, par suite, la corde $AC = AD$ (liv. I, 29) ; donc l'arc $AC = AD$.

3° Puisque $BC < BE$, l'oblique PC est plus courte que PE , et, par suite, la corde AC est plus courte que AE ; donc l'arc AC est plus petit que l'arc AE .

REMARQUE. Si l'on prolonge les arcs *AB*, *AC*, *AD*, *AE* jusqu'à la rencontre de la circonférence *OB*, aux points *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, l'arc *AB'* sera plus grand qu'un quadrant, la normale *PB'* contiendra le centre *O*, et on prouvera, comme précédemment, que : 1° l'arc *AB'*, perpendiculaire à la circonférence *OB*, est plus grand que tout arc oblique *AC'* ; 2° deux arcs obliques *AC'*, *AD'*, dont les pieds s'écartent également de l'arc perpendiculaire, sont égaux ; 3° de deux

arcs obliques AC' , AE' , celui dont le pied s'écarte le moins de l'arc perpendiculaire, est le plus grand.

THÉORÈME XVIII.

Dans tout triangle sphérique ABC , un côté quelconque AB est plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.



Soit $OABC$ l'angle solide correspondant au triangle proposé (déf. 15). Les côtés AB , AC , BC sont les arcs correspondants aux angles plans AOB , AOC , BOC dans des cercles égaux : or, dans l'angle trièdre $OABC$, on a l'angle plan $AOB < AOC + BOC$, et $AOB > AOC - BOC$ (liv. II, 11) ; donc on aura de même le côté $AB < AC + BC$, et $AB > AC - BC$ (g. pl. liv. III, 7).

THÉORÈME XIX.

La distance d'un point à un autre, sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle, AB , qui joint ces deux points.



Il est évident que, parmi toutes les lignes qu'on peut mener du point A au point B , sur la surface de la sphère, il en est au moins une qui n'en admet pas de plus courte qu'elle ; donc, si l'on prouve que toute ligne $ALMNPB$, autre que l'arc AB , en admet une plus courte qu'elle, il s'ensuivra que cet arc sera la plus courte de toutes.

Pour cela, prenons, sur l'arc AB , entre A et B , un point

C situé hors de la ligne $ALMNPB$; du point A comme pôle, avec une corde égale à celle qui sous-tend l'arc AC, décrivons une circonférence (12, cor. 1) qui rencontrera la ligne $ALMNPB$ en un point M (ax. 11); puis, menons les arcs de grand cercle, AM, BM. Dans le triangle ABM, on a $AB < AM + BM$ (18); retranchant d'une part AC et d'autre part AM, il reste $BC < BM$; donc, si du point B comme pôle, avec la corde BC, on décrit une circonférence, la ligne $MNPB$ rencontrera cette circonférence en un point N placé entré M et B (ax. 11). Cela étant, concevons que le secteur AOM et la ligne ALM tournent simultanément autour de AO: puisque l'arc $AM = AC$, le point M tombera au point C et la ligne ALM, dont tous les points sont situés à une distance du centre O, égale au rayon OA, sera tracée de A en C sur la surface de la sphère. Pareillement, puisque l'arc $BN = BC$, on pourra faire en sorte que la ligne BPN joigne le point B au point C. Il en résultera une ligne totale ALCPB, tracée de A en B sur la sphère, et plus courte que la courbe ALMNPB d'une quantité MN; donc toute ligne ALMNPB, autre que l'arc AB, en admet une plus courte qu'elle; donc l'arc AB est la distance du point A au point B.

REMARQUE. Lorsque les deux points A et B sont les extrémités d'un diamètre de la sphère, les arcs AM, BM forment une demi circonférence AMB égale à l'arc ACB. Alors on a, par ce qui précède, l'arc $AM < ALM$ et l'arc $BM < BPM$; donc $AM + BM$, ou $ACB < ALMNPB$; donc la distance du point A au point B est égale à l'une quelconque des demi-circonférences de grand cercle, en nombre infini, qui joignent ces deux points.

THÉORÈME XX.

La somme des côtés de tout polygone sphérique

ABCDE est moindre que la circonférence d'un grand cercle.



Soit OABCDE l'angle solide correspondant au polygone proposé. La somme des angles plans AOB, BOC, COD, etc., de cet angle solide est moindre que quatre angles droits (liv. II, 15); donc la somme des arcs AB, BC, CD, etc., correspondants à ces angles, dans des cercles égaux, est moindre que la circonférence d'un grand cercle (g. pl. liv. III, 7).

THÉORÈME XXI.

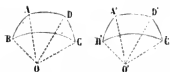
La somme des angles d'un triangle sphérique ABC est moindre que six et plus grande que deux angles droits.



Soit OABC l'angle solide correspondant au triangle proposé. La somme des angles dièdres OA, OB, OC est moindre que six et plus grande que deux angles droits (liv. II, 16); donc la somme des angles plans A, B, C, correspondants à ces angles dièdres, est moindre que six et plus grande que deux angles droits (liv. I, 17).

THÉORÈME XXII.

Dans la même sphère ou dans des sphères égales, à des angles solides au centre OABCD, O'A'B'C'D' égaux entre eux, correspondent des polygones égaux; et réciproquement.



1° Car si l'on fait coïncider les deux angles solides de manière que l'arête OA prenne la direction de l'arête $O'A'$, l'arête OB celle de $O'B'$, et ainsi de suite, les points A, B, C, D tomberont aux points A' , B' , C' , D' et, par suite, le côté AB coïncidera avec $A'B'$ (2. rem. 1), le côté BC avec $B'C'$, etc.; donc les deux polygones ABCD, $A'B'C'D'$ sont égaux entre eux.

2° Si l'on fait coïncider les deux polygones, le centre O tombera en O' (1) et, par suite, les arêtes OA, OB, OC, etc., prendront les directions des arêtes $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, etc.: donc les angles solides O et O' coïncideront; donc ils sont égaux.

REMARQUE. On voit de même que deux pyramides sphériques OABCD, $O'A'B'C'D'$, qui ont des bases égales, sont égales entre elles.

COROLLAIRE 1. Deux polygones sphériques, symétriques d'un troisième, sont égaux. Car les angles solides correspondants à ces deux polygones, étant symétriques d'un troisième (déf. 24), sont égaux entre eux (liv. II, 34).

COROLLAIRE 2. Deux pyramides sphériques, symétriques d'une troisième, sont égales. Car les polygones qui servent de bases à ces deux pyramides, étant symétriques d'un troisième (déf. 25), sont égaux entre eux.

THÉORÈME XXIII.

Lorsque deux triangles ABC, $A'B'C'$, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun et placés de la même manière, le troisième côté de l'un est égal au troisième de l'autre; les deux triangles

sont égaux, et les autres angles, opposés à des côtés égaux, sont égaux entre eux.



Soit l'angle $A = A'$, le côté $AB = A'B'$ et le côté $AC = A'C'$. En vertu de ces égalités, les angles trièdres O et O' , correspondants

aux deux triangles, ont l'angle dièdre $OA = O'A'$ (liv. I, 10), l'angle $AOB = A'O'B'$ et l'angle $AOC = A'O'C'$ (g. pl. liv. III, 6); donc l'angle plan $BOC = B'O'C'$, les deux angles trièdres sont égaux, l'angle dièdre $OB = O'B'$ et l'angle dièdre $OC = O'C'$ (liv. II, 2); donc le côté $BC = B'C'$ (g. pl. liv. III, 6), le triangle $ABC = A'B'C'$, l'angle $B = B'$ et l'angle $C = C'$ (liv. I, 16).

REMARQUE. Si les côtés, qu'on suppose égaux, n'étaient pas situés de la même manière, les deux angles solides O , O' et, par suite, les triangles ABC , $A'B'C'$, seraient symétriques l'un de l'autre (liv. II, 1, rem.).

THÉORÈME XXIV.

Lorsque deux triangles ABC , $A'B'C'$, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun et placés de la même manière, le troisième angle de l'un est égal au troisième de l'autre; les deux triangles sont égaux; et les autres côtés, opposés à des angles égaux, sont égaux entre eux.



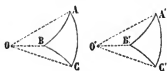
Soit $AB = A'B'$, $A = A'$, $B = B'$. Les angles solides O et O' , correspondants aux triangles proposés, ont l'angle plan $AOB =$

$A'O'B'$, l'angle dièdre $OA = O'A'$ et l'angle dièdre $OB = O'B'$; donc l'angle dièdre $OC = O'C'$; les deux angles solides sont égaux, l'angle $AOC = A'O'C'$ et l'angle $BOC = B'O'C'$ (liv. II, 4); donc l'angle $C = C'$, le triangle $ABC = A'B'C'$, le côté $AC = A'C'$ et le côté $BC = B'C'$.

REMARQUE. Si les angles, qu'on suppose égaux, n'avaient pas la même situation, les deux angles solides O et O' seraient symétriques l'un de l'autre (liv. II, 4, rem.), ainsi que les deux triangles proposés.

THÉORÈME XXV.

Lorsque deux triangles ABC , $A'B'C'$, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, ont les trois côtés égaux chacun à chacun et placés de la même manière, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux, ainsi que les triangles proposés.



Soit $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$. On en conclut l'angle $AOB = A'O'B'$, $AOC = A'O'C'$ et $BOC = B'O'C'$. Donc l'angle dièdre $OA = O'A'$, l'angle dièdre $OB = O'B'$, l'angle dièdre $OC = O'C'$ et l'angle solide $OABC = O'A'B'C'$ (liv. II, 6); donc l'angle $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ et le triangle $ABC = A'B'C'$.

REMARQUE. Si les côtés égaux n'avaient pas la même situation, les angles solides O et O' seraient symétriques l'un de l'autre (liv. II, 6, rem.), ainsi que les triangles proposés.

THÉORÈME XXVI.

Lorsque deux triangles ABC , $A'B'C'$, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, ont les trois

angles égaux chacun à chacun et placés de la même manière, les côtés opposés aux angles égaux sont égaux entre eux, ainsi que les deux triangles proposés.



Soit l'angle $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. On en conclut l'égalité des angles dièdres OA et $O'A'$, OB et $O'B'$, OC et $O'C'$; donc

les angles plans, opposés aux angles dièdres égaux, sont égaux entre eux, ainsi que les angles solides OAC , $O'A'B'C'$ (liv. II, 10); donc le côté $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ et le triangle $ABC = A'B'C'$.

REMARQUE. Si les angles égaux n'étaient pas placés de la même manière, les deux angles solides O et O' seraient symétriques l'un de l'autre (liv. II, 10, rem.), ainsi que les deux triangles proposés.

THÉORÈME XXVII.

Dans tout triangle sphérique isocèle ABC , les angles opposés aux côtés égaux sont égaux entre eux; et réciproquement.



1° Soit le côté $AB = AC$, et OAC l'angle solide correspondant au triangle proposé. Puisque l'arc $AB = AC$, l'angle $AOB = AOC$; donc l'angle dièdre $OC = OB$ (liv. II, 3) et, par suite, l'angle $C = B$.

2° Soit l'angle $B = C$. On aura, dans l'angle trièdre OAC , l'angle dièdre $OB = OC$; donc $AOC = AOB$ (liv. II, 5) et, par suite, l'arc $AC = AB$.

REMARQUE. L'arc AD , mené du sommet au milieu de la base d'un triangle isocèle, est perpendiculaire à cette base

et divise l'angle du sommet en deux parties égales. Car les triangles ABD , ACD , ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, l'angle $ADB = ADC$ et l'angle $BAD = CAD$ (25).

THÉORÈME XXVIII.

Dans tout triangle sphérique ABC , à un plus grand côté est opposé un plus grand angle; et réciproquement.

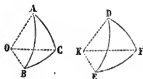


1° Soit l'arc $AC > AB$. Dans l'angle trièdre $OABC$, l'angle AOC est plus grand que AOB ; donc l'angle dièdre OB est plus grand que OC (liv. II, 12) et, par suite, l'angle B est plus grand que l'angle C (liv. I, 17).

2° Soit l'angle $B > C$. On a l'angle dièdre $OB > OC$ et, par suite, l'angle $AOC > AOB$; donc $AC > AB$.

THÉORÈME XXIX.

Lorsque deux triangles sphériques ABC , DEF , situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, ont deux côtés égaux chacun à chacun, et que l'angle compris par les deux côtés de l'un est plus petit que l'angle compris par les deux côtés de l'autre, le troisième côté du premier est plus petit que le troisième côté du second.



Soit $AB = DE$, $AC = DF$ et l'angle $BAC < EDF$: on aura $BC < EF$.

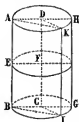
En effet, puisque le côté $AB = DE$, l'angle $AOB = DKE$; de même, puisque le côté AC

$=DF$, l'angle $AOC=DKF$; enfin, puisque l'angle BAC est plus petit que EDF , l'angle dièdre AO est plus petit que DK ; donc $BOC < EKF$ (liv. II, 13) et, par suite, $BC < EF$.

REMARQUE. La réciproque est vraie et se démontre d'une manière analogue.

THÉORÈME XXX.

Dans tout cylindre, les bases et les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles égaux.

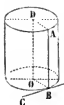


Car, en même temps que le rectangle $ABCD$ engendre le cylindre, tous les points A, B, E , etc., du côté mobile AB décrivent des circonférences qui ont pour rayons les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe CD , et dont les plans sont perpendiculaires à cette droite (liv. I, 8, cor. 2); or $AD = BC = EF$, etc.; donc les bases du cylindre et toutes les sections perpendiculaires à l'axe sont des cercles égaux.

REMARQUE. On voit aussi que toute section $ABGH$, faite dans un cylindre suivant l'axe, est un rectangle double du rectangle générateur, et que toute section $ABIK$, faite par un plan parallèle à l'axe, est un rectangle dont deux côtés sont égaux et parallèles à l'axe.

THÉORÈME XXXI.

Le plan ABC , conduit suivant une tangente à la base d'un cylindre et la génératrice qui passe par le point de contact, est tangent au cylindre.



En effet, toute génératrice, autre que AB , étant menée par un point de la circonférence OB , situé hors de la tangente BC , parallèlement à AB , est parallèle au plan ABC (liv. I, 3); donc, à l'exception de la droite AB , la surface latérale du cylindre a tous ses points situés hors du plan ABC ; donc ce plan est tangent au cylindre (déf. 51).

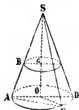
REMARQUE. Réciproquement, tout plan ABC , tangent au cylindre, coupe le plan de la base suivant une tangente. Car, si l'intersection BC rencontrait la circonférence OB en deux points, le plan ABC contiendrait les génératrices menées par ces points, ce qui est contre la supposition (déf. 51).

COROLLAIRE 1. Le plan tangent ABC est perpendiculaire au plan $ABOD$, conduit suivant l'axe et la génératrice de contact. Car le plan ABC est conduit suivant la tangente BC , qui est perpendiculaire aux deux droites OB , AB menées par son pied dans le plan $ABOD$ (liv. I, 18).

COROLLAIRE 2. Par un point, pris sur la surface latérale d'un cylindre, on ne peut mener qu'un seul plan tangent. Car si l'on pouvait en mener deux, ils seraient perpendiculaires au plan mené par l'axe et la génératrice de contact, ce qui est impossible (liv. I, 22).

THÉORÈME XXXII.

Toute section, faite dans un cône par un plan perpendiculaire à l'axe, est un cercle.



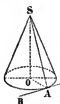
Car, en même temps que le triangle AOS engendre le cône, un point quelconque B du côté mobile SA décrit une circonférence qui a pour rayon la perpendiculaire BC abaissée sur l'axe SO et dont le plan est perpendiculaire à cette droite (liv. I, 8, cor. 2).

REMARQUE. On voit aussi que toute sec-

tion SAD, faite dans un cône suivant l'axe, est un triangle isocèle double du triangle générateur, et que toute section SAE, faite par un plan mené par le sommet, est un triangle isocèle qui a pour sommet celui du cône.

THÉORÈME XXXIII.

Le plan SAB, conduit suivant une tangente à la base d'un cône et la génératrice menée par le point de contact, est tangent au cône.



En effet, tout autre point de la circonférence OA étant situé hors de la tangente AB , toute génératrice, différente de SA , ne rencontre le plan SAB qu'en un seul point S . Donc le plan SAB ne rencontre la surface latérale du cône que suivant la génératrice SA ; donc il est tangent (déf. 51).

REMARQUE. Réciproquement, tout plan SAB , tangent au cône, coupe le plan de la base suivant une tangente. Car si l'intersection AB rencontrait la circonférence OA en deux points, le plan SAB contiendrait les génératrices menées par ces points, ce qui est contre la supposition (déf. 51).

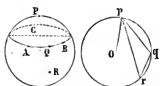
COROLLAIRE 1. Le plan tangent SAB est perpendiculaire au plan SAO , conduit suivant l'axe et la génératrice de contact. Car le plan SAB est conduit suivant la tangente AB , perpendiculaire aux deux droites OA , SA (liv. I, 18).

COROLLAIRE 2. Par un point de la surface latérale d'un cône, autre que le sommet, on ne peut mener qu'un seul plan tangent (liv. I, 22).

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE III.

PROBLÈME PREMIER.

*Étant donnée une sphère, trouver son rayon.**



D'un point P, comme pôle, décrivons la circonférence ABC (12, cor. 1); prenons un point Q, sur cette circonférence; de ce point, comme pôle, décrivons une seconde circonférence qui rencontre la première en deux points A et B; des points A et B, comme pôles, avec une corde égale à PA, décrivons des arcs qui se rencontreront aux points P et R, sommets des triangles sphériques isocèles qui ont pour base commune l'arc de grand cercle, mené du point A au point B; construisons le triangle pqr avec les distances rectilignes PQ, PR, QR (g. pl. liv. III, prob. 23); le rayon Op du cercle circonscrit à ce triangle (g. pl. liv. III, prob. 4) sera le rayon de la sphère.

En effet, les points P, Q, R étant situés chacun à égale distance des deux points A et B, leur plan est perpendiculaire sur le milieu de la corde AB et passe par le centre de la sphère (liv. I, 32); donc les trois points P, Q, R appartiennent à la circonférence d'un grand cercle; donc le rayon Op du cercle circonscrit au triangle pqr est égal au rayon de la sphère (2).

PROBLÈME II.

*Étant donnés deux points A et B sur la sphère, décrire une circonférence de grand cercle qui passe par ces deux points.**



Des points A et B comme pôles, avec la corde d'un quadrant, décrivons deux circonférences qui se coupent en P et Q (14, rem.); du point P comme pôle, avec la même corde, décrivons une circonférence ABC, qui passera par les points donnés A et B et sera la circonférence demandée.

REMARQUE. La même construction sert à trouver les pôles P et Q d'une circonférence ou d'un arc de grand cercle, ABC.

PROBLÈME III.

Par un point A, pris comme on voudra sur la sphère, faire passer une circonférence de grand cercle, perpendiculaire à celle d'un grand cercle donné, BD.



Du point A comme pôle, avec la corde d'un quadrant, décrivons une circonférence qui rencontre l'arc donné BD en un point P; du point P comme pôle, avec la même corde, décrivons une circonférence AEF qui passera par le point A et sera la circonférence demandée.

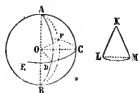
Car le grand cercle BD, contenant le pôle P du cercle AEF, est perpendiculaire à son plan (13, cor. 1); donc les arcs BD, AEF sont perpendiculaires entre eux (15).

REMARQUE. Lorsque le point A est un pôle de l'arc BD, tout arc de grand cercle, qui passe par le point A, satisfait à l'énoncé: mais, dans tout autre cas, le problème n'admet qu'une seule solution (16, rem.).

PROBLÈME IV.

Par un point A, donné sur un arc de grand cercle

ACB, mener un arc de grand cercle, qui fasse avec le premier un angle égal à l'angle donné K.



Du point K comme centre, avec un rayon égal à celui de la sphère, décrivons l'arc LM terminé aux deux côtés de l'angle; du point A comme pôle, avec la corde d'un qua-

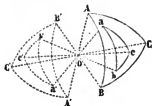
drant, décrivons une circonférence CDE qui rencontre ACB en un point C; du point C comme pôle, avec une corde égale à LM, décrivons une circonférence qui rencontre CDE en deux points D et F: les arcs de grand cercle, AD, AF, satisfont à l'énoncé.

* En effet, chacun des arcs AC, AD étant égal à un quadrant, les angles AOC, AOD sont droits; donc COD est égal à l'angle des deux arcs AC, AD (15); mais, par construction, l'arc CD = LM, donc COD = K; on prouverait de même que l'angle COF des deux arcs AC, AF est égal à l'angle donné K.

REMARQUE. *L'angle CAD de deux arcs de grand cercle a pour mesure l'arc CD, décrit de son sommet comme pôle avec la corde d'un quadrant, et compris entre ses côtés (g. pl. liv. IV, 23).*

PROBLÈME V.

Étant donné un triangle sphérique ABC, décrire son triangle polaire.



De chacun des points A, B, C comme pôle, avec la corde d'un quadrant, décrivons une circonférence de grand cercle. La première et la seconde se coupent en deux points c et c' qui sont les pôles de l'arc AB (14); la pre-

mière et la troisième, en des points b et b' pôles de l'arc AC; la seconde et la troisième, en des points a et a' pôles de l'arc BC. La surface de la sphère est ainsi partagée en huit triangles qui ont pour sommets les pôles des côtés du triangle ABC. Mais le pôle a est situé, par rapport à la circonférence BC (th. 5), sur le même hémisphère que le triangle ABC; pareillement, le pôle b est situé, par rapport à la circonférence AC, sur le même hémisphère que le triangle ABC; enfin, le pôle c est situé, par rapport à la circonférence AB, sur le même hémisphère que ABC; donc si l'on joint a et b , a et c , b et c par des arcs de grand cercle, abc sera le triangle polaire du triangle proposé (déf. 18).

REMARQUE 1. On voit aussi que le point A, pôle de l'arc bc , est situé, par rapport à la circonférence bc , sur le même hémisphère que le triangle abc , et que les points B et C, pôles des arcs ac et ab , sont situés de la même manière, par rapport aux circonférences dont ces arcs font partie. Il suit de là que, réciproquement, ABC est le triangle polaire de abc .

REMARQUE 2. Le rayon OA, perpendiculaire au plan bOc (13), est situé du même côté de ce plan que la troisième arête Oa de l'angle trièdre Oabc; pareillement, le rayon OB, perpendiculaire au plan aOc , est situé du même côté de ce plan que l'arête Ob; et le rayon OC, perpendiculaire au plan aOb , est situé du même côté de ce plan que l'arête Oc; donc les angles trièdres OABC, Oabc sont supplémentaires (liv. II, 8); donc les angles plans AOB et c, AOC et b, BOC et a, aOb et C, aOc et B, bOc et A sont aussi supplémentaires. C'est par cette raison qu'on a choisi le triangle abc pour triangle polaire de ABC, parmi les huit triangles qui ont pour sommets les pôles des côtés de ce triangle. On pourrait de même prendre $a'b'c'$, symétrique de abc , pour triangle polaire de ABC, et $A'B'C'$, symétrique de ABC, pour triangle polaire de abc . Sous ce point de vue, tout triangle sphérique ABC a deux triangles po-

laires abc et $a'b'c'$, symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la sphère, et, en général, n'en a pas davantage.

REMARQUE 3. L'angle A du triangle ABC étant le supplément de l'angle bOc correspondant au côté bc , on voit que tout angle d'un triangle sphérique a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle moins le côté bc opposé à cet angle dans son triangle polaire.

PROBLÈME VI.

Étant donnés deux côtés a et b d'un triangle sphérique, et l'angle C qu'ils comprennent, décrire le triangle.

Traçons l'arc $BC = a$; au point C de cet arc, faisons l'angle $ACB = A'CB = C$; prenons $CA = CA' = b$; puis, menons les arcs de grand cercle, BA et BA' : les triangles ABC , $A'BC$ répondent à l'énoncé.

REMARQUE. Lorsque les trois côtés du triangle ABC sont inégaux, les triangles symétriques ABC , $A'BC$ forment deux solutions du problème; mais lorsque le triangle ABC est isocèle ou équilatéral, on peut le faire coïncider avec $A'BC$ (23), et, par suite, le problème n'admet qu'une solution.

PROBLÈME VII.

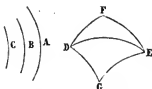
Étant donné un côté a d'un triangle sphérique, et les angles B , C adjacents à ce côté, décrire le triangle.

Traçons l'arc $BC = a$; au point B , faisons l'angle $ABC = A'BC = B$ et, au point C , l'angle $ACB = A'CB = C$: les triangles ABC , $A'BC$, qui en résultent, répondent à l'énoncé.

REMARQUE. Le problème admet deux ou une seule solution dans les mêmes cas que le problème précédent.

PROBLÈME VIII.

Étant donnés les trois côtés A, B, C d'un triangle sphérique, décrire le triangle.



Traçons l'arc DE égal au côté A ; du point D comme pôle, avec une corde égale à celle du côté B, décrivons une circonférence ; du point E comme pôle, avec une

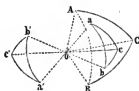
corde égale à celle du côté C, décrivons une autre circonférence qui rencontre la première en deux points F et G ; puis, menons les arcs de grand cercle, DF, EF, DG, EG : les triangles DEF, DEG satisfont à l'énoncé.

REMARQUE 1. Pour que l'angle trièdre, correspondant au triangle demandé, soit possible, il faut et il suffit que la somme de ses angles plans soit moindre que quatre angles droits et que chacun d'eux soit plus petit que la somme des deux autres (liv. II, 17) ; donc, pour que le problème proposé soit possible, il est nécessaire et il suffit que la somme des côtés donnés A, B, C soit moindre que la circonférence d'un grand cercle, et que chacun d'eux soit plus petit que la somme des deux autres.

REMARQUE 2. Lorsque les trois côtés A, B, C sont inégaux, les triangles symétriques DEF, DEG forment deux solutions du problème. Mais lorsque le triangle DEF est isocèle ou équilatéral, on peut le faire coïncider avec DEG (25) et, par suite, le problème n'admet qu'une seule solution.

PROBLÈME IX.

Étant donnés les trois angles α, β, γ d'un triangle sphérique, décrire le triangle.



Cherchons les arcs correspondants aux suppléments de α, β, γ ; construisons le triangle ABC dont les côtés soient égaux à ces arcs (8); décrivons ensuite les triangles $abc, a'b'c'$ polaires de ABC (5); ces deux triangles répondront à l'énoncé.

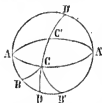
En effet, par hypothèse, l'angle BOC , correspondant à l'arc BC , est le supplément de l'angle donné α ; d'ailleurs, puisque le triangle abc est polaire de ABC , l'angle bac a pour supplément BOC (5, rem.); donc $bac = \alpha$; on a de même $abc = \beta, acb = \gamma$; donc le triangle abc et son symétrique $a'b'c'$ satisfont au problème et forment deux solutions distinctes lorsque les trois angles donnés α, β, γ sont inégaux.

REMARQUE. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle ABC , ou l'angle trièdre $OABC$, soit possible, c'est-à-dire qu'on ait à la fois $AOB + AOC + BOC < 4D$ et $BOC < AOB + AOC$, en supposant que BOC soit le plus grand des trois angles de l'angle solide $OABC$, et désignant par D l'angle plan droit (liv. II, 17): or, par hypothèse, $AOB = 2D - \gamma, AOC = 2D - \beta, BOC = 2D - \alpha$, ce qui transforme les deux relations précédentes en $6D - (\alpha + \beta + \gamma) < 4D$ et $2D - \alpha < 4D - (\beta + \gamma)$, ou $\alpha + \beta + \gamma > 2D$ et $\alpha > \beta + \gamma - 2D$. Donc, pour que le triangle abc soit possible, il faut et il suffit que la somme des angles donnés α, β, γ soit plus grande que deux angles droits, et que le plus petit des trois soit plus grand que l'excès de la somme des deux autres sur deux angles droits.

On suppose d'ailleurs implicitement que chacun des angles α, β, γ est plus petit que deux droits et, par suite, que leur somme est moindre que six angles droits.

PROBLÈME X.

Étant donnés deux côtés a et b d'un triangle sphérique, et l'angle A opposé au côté a , décrire le triangle.



Traçons la circonférence de grand cercle, ADD' ; en un point A de ADD' faisons l'angle $BAC = A$ (4); prenons, sur la demi-circonférence AA' , un arc $AC = b$; et, du point C comme pôle, avec une corde égale à celle de l'arc a , décrivons une circonférence qui ren-

contre la demi-circonférence ADA' en un point B : le triangle sphérique ABC satisfait à l'énoncé.

REMARQUE. On voit que le nombre des solutions du problème est égal au nombre des points d'intersection, situés entre A et A' , de la circonférence, décrite du point C comme pôle, avec la demi-circonférence ADA' . Cela étant, supposons que l'angle A soit aigu et menons, par le point C , la demi-circonférence de grand cercle DCD' perpendiculaire à la circonférence ADD' (3); on aura l'arc $CD < CD'$. En effet, si l'on trace la demi-circonférence de grand cercle $AC'A'$ de manière que l'angle $C'A'D' = CAD$, elle rencontrera l'arc CD' en un point C' (ax. 11) et les triangles rectangles ACD , $A'C'D'$ auront les côtés AD , $A'D'$ égaux, comme correspondants à des angles au centre, opposés au sommet, l'angle droit $D = D'$, et l'angle $A = A'$, par construction; donc le côté $CD = C'D'$; or $C'D' < CD'$, donc $CD < CD'$. Il en résulte que CD est le plus petit arc de grand cercle qu'on puisse mener du point C à la circonférence ADD' et que CD' est le plus grand (17); donc, si l'on avait $a < CD$ ou $a > CD'$ la circonférence, décrite du point C comme pôle, ne rencon-

trerait pas la circonférence ADD' (princ. th. 5) et le problème serait impossible ; mais si l'on avait $a=CD$ ou $a=CD'$, cette circonférence rencontrerait ADD' en un seul point D ou D' , et le problème admettrait une seule solution ou serait impossible. Laissant de côté tous ces cas particuliers, proposons-nous de discuter le problème, lorsque l'angle A étant aigu, le côté b est moindre qu'un quadrant. Alors nous distinguerons plusieurs cas, suivant qu'on aura : 1° $a < b$; 2° $a = b$; 3° $a > b$ et $a + b < 2q$; 4° $a > b$ et $a + b =$ ou $> 2q$, q désignant un quadrant.

1° a , étant moindre que CA , est, à plus forte raison, moindre que CA' ; or, on a aussi, par hypothèse, $a > CD$; donc la circonférence, décrite du point C comme pôle, rencontre la demi-circonférence ADA' en deux points B et B' situés, l'un entre A et D , l'autre entre D et A' (ax. 11), et le problème admet deux solutions.

2° Lorsque $a = b$, le point B coïncide avec A et le problème n'admet qu'une solution.

3° Lorsqu'on a $a > b$ et $a + b < 2q$, l'arc a est moindre que CA' ; d'ailleurs il est plus grand que CD ; donc il existe un point B' d'intersection, situé entre D et A' , et le problème admet une solution.

4° Lorsqu'on a $a > b$ et $a + b =$ ou $> 2q$, le côté a est égal ou supérieur à CA' , et la circonférence, décrite du point C comme pôle, ne rencontre la demi-circonférence ADA' en aucun point situé entre A et A' (17) ; donc le problème est impossible.

Les cas relatifs aux autres hypothèses, qu'on peut faire sur les données a, b, A du problème, se discuteraient d'une manière analogue. Les résultats auxquels ils conduisent sont contenus dans le tableau suivant, où l'on suppose implicitement que a est toujours compris entre le plus grand et le plus petit des arcs de grand cercle, menés du point C à la circonférence ADD' , et dans lequel on fait abstraction des solutions qui pourraient provenir des triangles symétriques de ceux qu'on obtient par la construction précédente.

$A < D$	$b < q$	$a < b$	deux solutions.
		$a = b$	une solution.
		$a > b$ et $a + b < 2q$	une solution.
		$a > b$ et $a + b = \text{ou} > 2q$	aucune solution.
$A < D$	$b = q$	$a < b$	deux solutions.
		$a = \text{ou} > b$	aucune solution.
	$b > q$	$a < b$ et $a + b < 2q$	deux solutions.
		$a < b$ et $a + b = \text{ou} > 2q$	une solution.
$A = D$	$b < q$		une solution.
	$b > q$		une solution.
	$b < q$	$a = \text{ou} < b$	aucune solution.
		$a > b$ et $a + b > 2q$	deux solutions.
		$a > b$ et $a + b = \text{ou} < 2q$	une solution.
$A > D$	$b = q$	$a = \text{ou} < b$	aucune solution.
		$a > b$	deux solutions.
	$b > q$	$a < b$ et $a + b > 2q$	une solution.
		$a < b$ et $a + b = \text{ou} < 2q$	aucune solution.
		$a = b$	une solution.
		$a > b$	deux solutions.

PROBLÈME XI.

Étant donnés deux angles A et B d'un triangle sphérique, et le côté a opposé à l'angle A , décrire le triangle.

On cherche les arcs a' , b' correspondants aux suppléments des angles A , B , et l'angle A' supplément de celui qui correspond au côté a . On connaît ainsi, dans le triangle polaire du triangle demandé, deux côtés a' , b' et l'angle A' , opposé au côté a' (5, rem. 2); ce qui permet de décrire ce triangle (10). La construction s'achève en décrivant le triangle polaire de celui qu'on vient d'obtenir (5).

REMARQUE. Pour que le triangle demandé soit possible, il faut et il suffit que son triangle polaire soit possible; ce qui ramène la discussion du problème à celle du problème précédent.

LIVRE IV.

LES POLYÈDRES SEMBLABLES

ET LA MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

1. Deux polyèdres sont *semblables*, lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre (liv. II, déf. 39), et les faces homologues semblables.

REMARQUE. On dit que deux polyèdres sont *inversement semblables*, lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans un ordre inverse, et les faces homologues semblables. Alors, par opposition à ce genre de similitude, on donne le nom de *similitude directe* à celle qu'on a définie précédemment. Mais, lorsqu'il sera question de polyèdres semblables; sans indication du genre de similitude, on entendra toujours parler de deux polyèdres directement semblables.

2. Deux angles solides, qui ont la même grandeur, sont *équivalents*.

REMARQUE. Deux angles solides égaux sont toujours équivalents; mais deux angles solides équivalents peuvent être inégaux.

3. Un fuseau ou un onglet sphérique est *droit*, *aigu* ou *obtus*, selon que son angle est droit, aigu ou obtus.

REMARQUE. Deux grands cercles perpendiculaires entre eux partagent la sphère en quatre onglets droits égaux entre eux, et sa surface en quatre fuseaux droits qui sont aussi égaux entre eux. On voit de plus que trois grands cercles, tels que chacun d'eux soit perpendiculaire aux plans des deux autres, partagent la sphère en huit pyramides triréc-

tangles égales entre elles, et sa surface en huit triangles tri-rectangles égaux entre eux.

4. Un *fuseau cylindrique* ou *conique* est la partie de la surface latérale d'un cylindre ou d'un cône, comprise entre deux plans conduits suivant l'axe.

5. La *base* du fuseau est la partie de la circonférence de la base du cylindre ou du cône, comprise entre les mêmes plans.

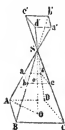
6. Un *onglet cylindrique* ou *conique* est la partie d'un cylindre ou d'un cône, comprise entre deux plans conduits suivant l'axe.

7. La *base* de l'onglet est la partie de la base du cylindre ou du cône, comprise entre les mêmes plans.

8. Les trois *dimensions* d'un parallépipède rectangle sont les deux dimensions de sa base (g. pl. liv. v, déf. 4) et sa hauteur.

THÉORÈME PREMIER.

Lorsqu'on coupe une pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base : 1° les arêtes latérales et la hauteur SO sont divisées par ce plan en parties proportionnelles; 2° la section $abcd$, faite dans la pyramide, est semblable à la base; 3° la pyramide partielle $Sabcd$ est semblable à la pyramide proposée.



1° Les deux droites AO , ao sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles $ABCD$, $abcd$ coupés par un troisième plan SAO ; par la même raison, les droites AB et ab , BC et bc , etc., sont parallèles. Mais, dans le triangle SAO , la droite ao étant parallèle à la base AO , on a la proportion $SO : so :: SA : Sa$; on a de même $SA : Sa :: SB : Sb$, et ainsi de suite.

2° Les angles BAD , bad , ayant les côtés parallèles chacun à chacun et dirigés dans un même sens, sont égaux entre eux; par la même raison, l'angle $ABC = abc$, l'angle $BCD = bcd$, etc.; d'ailleurs la droite ab étant parallèle à AB , on a $AB:ab::SB:Sb$; on a aussi $BC:bc::SB:Sb$ et, par suite, $AB:ab::BC:bc$. On prouverait de même que $BC:bc::CD:cd$, etc.; donc les deux polygones $ABCD$, $abcd$ sont semblables.

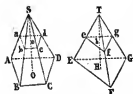
3° Les angles dièdres SA et Sa , SB et Sb , etc., formés par les mêmes plans, sont égaux entre eux; les angles dièdres AB et $Sabc$ sont égaux comme correspondants (liv. I, 25); par la même raison, l'angle dièdre $BC = Sbcd$ et ainsi de suite; donc les deux pyramides ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre (liv. II, déf. 39); de plus, les faces homologues $ABCD$ et $abcd$, SAB et Sab , SBC et Sbc , etc., sont semblables; donc la pyramide $Sabcd$ est semblable à la pyramide $SABCD$ (déf. 1).

REMARQUE. Si le plan $a'b'c'd'$, parallèle à la base $ABCD$, rencontrait les directions des arêtes latérales SA , SB , SC , etc., au-delà du sommet S , la pyramide $Sa'b'c'd'$ serait inversement semblable à la pyramide proposée (déf. 1, rem.). De plus, lorsqu'on suppose l'arête $Sa' = Sa$, on a aussi $Sb' = Sb$, $Sc' = Sc$, $Sd' = Sd$; donc les pyramides $Sa'b'c'd'$, $Sabcd$ sont symétriques par rapport au point S . Ainsi la symétrie des polyèdres est un cas particulier de la similitude inverse, de même que leur égalité est un cas particulier de la similitude directe.

THÉORÈME II.

Lorsque deux pyramides $SABCD$, $TEFG$, qui ont leurs bases dans un même plan et des hauteurs égales, sont coupées par un plan parallèle à celui des bases :
1° les hauteurs SO , TH et toutes les arêtes latérales

sont divisées en parties proportionnelles; 2° les sections $abcd$, efg sont entre elles comme les bases.



1° Dans la pyramide $SABCD$, le plan $abcd$ étant parallèle à la base, on a $SO : So :: SA : Sa :: SB : Sb$, etc. (1); on a, de même, dans la pyramide $TEFG$, $TH : Th :: TE : Te :: TF : Tf$, etc.; mais, par hypothèse, la hauteur $SO = TH$; de plus, la distance $Oo = Hh$ (liv. I, 30, cor. 1); donc $SO - Oo = TH - Hh$ ou $So = Th$; donc on a $SO : So :: TH : Th$ et, par suite, $SA : Sa :: TE : Te :: SB : Sb :: TF : Tf$, etc.

2° La section $abcd$ étant semblable à la base $ABCD$ (1), on a $ABCD : abcd :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (g. pl. liv. v, 11) ou $:: \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$; on a de même $EFG : efg :: \overline{EF}^2 : \overline{ef}^2$ ou $:: \overline{TE}^2 : \overline{Te}^2$; or $SA : Sa :: TE : Te$ et, par suite, $\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2 :: \overline{TE}^2 : \overline{Te}^2$; donc $ABCD : abcd :: EFG : efg$.

COROLLAIRE. Lorsque les bases $ABCD$, EFG sont équivalentes, les sections $abcd$, efg sont aussi équivalentes.

THÉORÈME III.

Deux tétraèdres sont semblables, lorsqu'ils ont un angle solide égal compris entre arêtes proportionnelles et situées de la même manière.

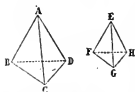


Soient $ABCD$, $AEFG$ les tétraèdres proposés, qu'on suppose placés de manière qu'ils aient l'angle solide A commun, et que les arêtes proportionnelles AB et AE , AC et AF , AD et AG soient situées dans la même direction. On a, par hypothèse, $AB : AE :: AC : AF$; donc EF est parallèle à BC (g. pl.

liv. IV, 2) : on a aussi $AB : AE :: AD : AG$; donc EG est parallèle à BD ; donc le plan GEF est parallèle au plan DBC (liv. I, 6) et, par suite, la pyramide AEF G est semblable à ABCD (1).

THÉORÈME IV.

Deux tétraèdres ABCD, EFGH sont semblables, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et placées de la même manière.

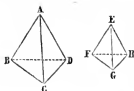


Soit l'angle dièdre $BC = FG$, la face ABC semblable à EFG et la face BCD semblable à FGH.

La face ABC étant semblable à la face EFG, on a l'angle plan $ABC = EFG$ et la proportion $AB : EF :: BC : FG$; pareillement, puisque la face BCD est semblable à FGH, on a l'angle $CBD = GFH$ et $BC : FG :: BD : FH$; donc les angles solides B et F ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun ; donc ils sont égaux (liv. II, 2) et, par suite, les deux pyramides ABCD, EFGH ont un angle solide égal compris entre arêtes proportionnelles ; donc elles sont semblables (3).

THÉORÈME V.

Deux tétraèdres ABCD, EFGH sont semblables, lorsqu'ils ont une face semblable, adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et situés de la même manière.

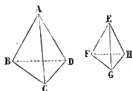


Soit la face BCD semblable à FGH , l'angle dièdre $BC = FG$, l'angle dièdre $BD = FH$ et l'angle dièdre $CD = GH$.

En vertu de ces hypothèses, les angles solides B et F ont un angle plan égal adjacent à deux angles dièdres égaux chacun à chacun ; donc l'angle plan ABC , opposé à l'angle dièdre BD , est égal à l'angle plan EFG , opposé à l'angle dièdre FH (liv. II, 4) ; on prouverait de même que, dans les angles solides C et G , l'angle plan $ACB = EGF$; donc le triangle ABC est semblable à EFG (g. pl. liv. IV, 4) et, par suite, les deux tétraèdres ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune ; donc ils sont semblables (4).

THÉORÈME VI.

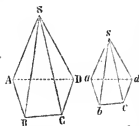
Deux tétraèdres $ABCD$, $EFGH$ sont semblables, lorsqu'ils ont les arêtes proportionnelles et situées de la même manière.



Soit $AB : EF :: AC : EG :: AD : EH :: BC : FG$, etc. Les triangles ABC , EFG ayant les côtés proportionnels, l'angle plan BAC , opposé à BC , est égal à l'angle plan FEG , opposé à FG (g. pl. liv. IV, 5) ; on a de même l'angle $BAD = FEH$ et l'angle $CAD = GEH$; donc l'angle solide A est égal à l'angle solide E (liv. II, 6) et, par suite, les deux pyramides ont un angle solide égal compris entre arêtes proportionnelles ; donc elles sont semblables (3).

THÉORÈME VII.

Deux pyramides $SABCD$, $sabcd$ sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre, à la base, égal et compris entre deux faces semblables chacune à chacune et situées de la même manière.



Soit l'angle dièdre $AB = ab$, la base $ABCD$ semblable à $abcd$ et la face SAB semblable à sab .

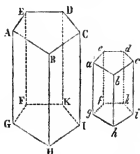
En vertu de ces hypothèses, les angles solides B et b ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun; donc l'angle dièdre $SB = sb$, l'angle dièdre $BC = bc$ et l'angle plan $SBC = sbc$ (liv. II, 2) : de plus, les proportions $BC : bc :: AB : ab$, $SB : sb :: AB : ab$ donnent $BC : bc :: SB : sb$; donc les faces latérales SBC , sbc ont un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc elles sont semblables. En considérant les angles C et c , on démontrerait de même l'égalité des angles dièdres SC et sc , CD et cd , et la similitude des faces SCD et scd , et ainsi de suite. Donc les pyramides $SABCD$, $sabcd$ ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables; donc elles sont semblables.

REMARQUE. On voit que la similitude de deux pyramides, de même espèce, exige $2n-1$ conditions, c'est-à-dire une condition de moins que leur égalité (liv. II, 20, rem.)

THÉORÈME VIII.

Deux prismes $ABCDEFGH$, $abcd efgh$ sont

semblables, lorsqu'ils ont un angle dièdre, à la base, égal et compris entre deux faces semblables chacune à chacune et situées de la même manière.



Soit l'angle dièdre $GH = gh$, la base $GHIKF$ semblable à $ghikf$ et la face $AGHB$ semblable à $aghb$.

En vertu de ces hypothèses, les angles solides H et h ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun ; donc l'angle dièdre $BH = bh$, l'angle dièdre $HI = hi$ et l'angle plan $BHI =$

bhi (liv. II, 2) : de plus, les proportions $BH : bh :: GH : gh$, $HI : hi :: GH : gh$ donnent $BH : bh :: HI : hi$; donc les faces latérales $BHIC$, $bhic$ ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ; donc elles sont semblables. En considérant les angles solides I et i , on démontrerait de même l'égalité des angles dièdres CI et ci , IK et ik et la similitude des faces $CIKD$ et $cikd$, et ainsi de suite : d'ailleurs les angles GH et gh , HI et hi , IK et ik , etc., étant égaux, leurs suppléments (liv. II, 25) AB et ab , BC et bc , CD et cd , etc., sont aussi égaux entre eux : enfin, les bases de chaque prisme étant égales (liv. II, 25), et la base $FGHIK$ étant semblable à $fg hik$, la base $ABCDE$ est aussi semblable à $abcde$. Donc les deux prismes ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables ; donc ils sont semblables.

COROLLAIRE 1. *Deux prismes droits sont semblables, lorsqu'ils ont les bases semblables, et les hauteurs proportionnelles aux côtés homologues des bases.*

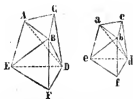
COROLLAIRE 2. *Deux parallélépipèdes rectangles, qui ont leurs dimensions (déf. 8) proportionnelles, sont semblables.*

COROLLAIRE 3. *Tous les cubes sont semblables* (g. pl. liv. IV, 9, cor. 3).

REMARQUE. On voit que la similitude de deux prismes, de même espèce, exige $2n-1$ conditions, c'est-à-dire une condition de moins que leur égalité (liv. II, 26, rem.).

THÉORÈME IX.

Deux polyèdres ABCDEF, abcdef, composés d'un même nombre de tétraèdres BEFD et bef d, BADE et bade, BACD et bacd semblables chacun à chacun et situés de la même manière, sont semblables.



En effet, les angles dièdres AB et ab , AE et ae , DE et de , etc., sont égaux entre eux et situés dans le même ordre, soit comme homologues dans deux tétraèdres semblables, soit comme étant composés d'angles

dièdres égaux chacun à chacun. De plus, les faces homologues ABC et abc , ABFE et $abfe$, etc., sont semblables, soit comme faces homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme étant composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et situés de la même manière (g. pl. liv. IV, 10); donc les polyèdres proposés sont semblables (déf. 1).

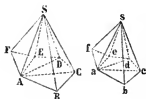
REMARQUE 1. Cette démonstration suppose que, lorsque deux triangles adjacents ABE, BEF de l'un des polyèdres sont situés dans un même plan, les deux triangles abe , bef , homologues aux premiers, de l'autre polyèdre, sont aussi dans un même plan, ce qui a toujours lieu; car, en vertu de la supposition, la somme des angles dièdres adjacents ABED, DBEF étant égale à deux droits (liv. I, 24), on a de

même $abed + dbef =$ deux droits, ce qui exige que les triangles abe , bef soient situés dans un même plan (liv. I, 24, cor. 1).

REMARQUE 2. Un polyèdre ABCDEF étant décomposé en tétraèdres (liv. II, 33, rem.), si l'on construit un triangle def semblable à la face DEF de l'un des tétraèdres, et qu'on mène les plans bef , bfd , bed de manière que les angles dièdres ef et EF , df et DF , $bedf$ et $BEDF$ soient égaux entre eux, le tétraèdre $bedf$ sera semblable à $BEDF$ (5) : concevons que l'on construise de même, sur la face bde homologue à BDE , un tétraèdre $bade$ semblable à $BADE$ et, sur la face bad homologue à BAD , un tétraèdre $bacd$ semblable à $BACD$; il en résultera un polyèdre $abcdef$ semblable à $ABCDEF$; donc, étant donné un polyèdre quelconque, on peut concevoir tant de polyèdres qu'on voudra semblables au premier.

THÉORÈME X.

Réciproquement, deux polyèdres semblables P et p sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et situés de la même manière.



Concevons le polyèdre P décomposé en tétraèdres qui ont tous pour sommet commun le point S (liv. II, 33, rem.) et le polyèdre p décomposé, de la même manière, en tétraèdres qui ont tous pour sommet commun le point s homologue à S : les pyramides homologues SAB et sab , SAC et sac , etc., sont semblables.

Considérons d'abord deux tétraèdres $SABC$, $sabc$ dans lesquels nous supposerons que les faces latérales SAB , sab appartiennent aux surfaces des polyèdres P et p . Les triangles SAB , sab sont semblables, soit comme faces homologues de deux polyèdres semblables (déf. 1), soit comme triangles homologues de deux polygones semblables (g. pl. liv. IV, 11); par la même raison, le triangle ABC est semblable à abc ; d'ailleurs l'angle dièdre AB du polyèdre P est égal à son homologue ab dans le polyèdre p (déf. 1); donc les tétraèdres $SABC$, $sabc$ ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune; donc ils sont semblables (4), la face SAC est semblable à son homologue sac , l'angle dièdre $SACB = sacb$ et, par suite, l'angle dièdre $SACD$, supplément de $SACB$ (liv. I, 24), est égal à l'angle dièdre $sacd$, supplément de $sacb$; de plus, les triangles ACD , acd sont semblables comme homologues dans les polygones $ABCDE$, $abcde$; donc les tétraèdres $SACD$, $sacd$ sont semblables (4); on prouverait de même que le tétraèdre $SADE$ est semblable à $sade$. Quant aux tétraèdres $SAEF$, $saef$ dont les bases AEF , aef ne sont pas situées dans un même plan avec les bases ADE , ade des tétraèdres précédents, on observe qu'on aura, comme précédemment, la face SAE semblable à sae , la face AEF semblable à aef et l'angle dièdre $SAED = saed$; mais l'angle dièdre $FAED$ du polyèdre P est égal à son homologue $faed$ dans le polyèdre p ; donc $FAED - SAED = faed - saed$, ou $SAEF = saef$; donc les tétraèdres $SAEF$, $saef$ sont semblables (4); et ainsi de suite, quel que soit le nombre des tétraèdres qui composent les polyèdres proposés.

COROLLAIRE. *Dans deux polyèdres semblables, les droites qui joignent des sommets homologues sont proportionnelles.*

REMARQUE. Lorsque deux polyèdres semblables ont deux côtés homologues égaux, tous les autres côtés homologues sont aussi égaux entre eux; les faces homologues sont égales et les polyèdres susceptibles de coïncider; donc ils sont égaux. Il en résulte que la similitude de deux polyèdres,

de même espèce, exige une condition de moins que leur égalité, c'est-à-dire $A-1$ conditions (liv. II, 28, rem.).

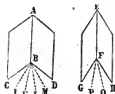
THÉORÈME XI.

Deux polyèdres P et p , semblables à un troisième P' , sont semblables entre eux.

En effet, les polyèdres semblables P et P' ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables (déf. 1); pareillement, les polyèdres semblables p et P' ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables; donc P et p ont aussi les angles dièdres égaux chacun à chacun et situés dans le même ordre, et les faces homologues semblables (g. pl. liv. IV, 12); donc ils sont semblables.

THÉORÈME XII.

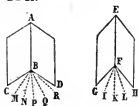
Deux angles dièdres $CABD$, $GEFH$ sont entre eux comme les angles plans correspondants CBD , $G FH$.



Supposons d'abord que les angles CBD , $G FH$ soient commensurables et qu'on ait, par exemple, $CBD : G FH :: 5 : 3$.

Si l'on divise l'angle CBD en cinq parties égales, et l'angle $G FH$ en trois parties aussi égales entre elles, tous ces angles partiels seront égaux entre eux. Cela étant, conduisons les plans ABI , ABK , $ABL...$ EFP , EFQ .

Puisqu'à des angles plans égaux correspondent des angles dièdres égaux entre eux (liv. I, 16), l'angle dièdre $CABD$ est divisé en cinq angles égaux, et l'angle dièdre $GEFH$ en contient trois; donc on a $CABD : GEFH :: 5 : 3$ ou $:: CBD : GFH$.



Supposons, en second lieu, que les angles CBD , GFH soient incommensurables; on aura encore la proportion $CABD : GEFH :: CBD : GFH$.

Pour le démontrer, divisons l'angle GFH , par exemple, en quatre parties IFG , IFK ... égales entre elles; portons IFG sur CBD autant de fois que cela est possible, et supposons que l'angle CBD contienne cinq fois IFG avec un reste $DBR < IFG$. Puisqu'à des angles plans égaux correspondent des angles dièdres égaux entre eux et qu'à un plus petit angle plan correspond un plus petit angle dièdre (liv. I, 17), les plans EFI , EFK , EFL diviseront l'angle dièdre $GEFH$ en 4 parties égales à $GEFI$ et l'angle dièdre $CABD$ contiendra cinq fois ce même angle $GEFI$ avec un reste $DABR < GEFI$: donc l'angle dièdre $CABD$ contient le quart de $GEFH$ autant de fois que l'angle plan CBD contient le quart de GFH ; or le nombre 4 des divisions de l'angle GFH a été pris arbitrairement, donc $CABD$ contient une partie aliquote de $GEFH$, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que CBD contient la même partie aliquote de GFH ; donc $CABD : GEFH :: CBD : GFH$.

REMARQUE. On prouverait de même que : 1° deux angles trièdres birectangles $BACD$, $FEGH$ sont entre eux comme leurs troisièmes angles plans CBD , GFH ; 2° deux fuseaux ou deux onglets, pris dans la même sphère ou dans des sphères égales, sont entre eux comme leurs angles (liv. III, déf. 10 et 12); 3° deux fuseaux ou deux onglets, pris dans le même cylindre ou dans des cylindres égaux, sont entre eux comme leurs bases (déf. 5 et 7); 4° deux fuseaux ou deux

onglets, pris dans le même cône ou dans des cônes égaux, sont entre eux comme leurs bases (déf. 5 et 7).

THÉORÈME XIII.

Tout angle dièdre a pour mesure l'angle plan qui lui correspond.

Soient A et A' deux angles dièdres, a et a' les angles correspondants. En vertu du théorème précédent, on a la proportion $A : A' :: a : a'$. Cela étant, si l'on prend A' pour unité d'angle dièdre et a' pour unité d'angle plan, le rapport $A : A'$ sera la mesure de l'angle A et le rapport $a : a'$ celle de l'angle a ; donc la mesure d'un angle dièdre est égale à celle de l'angle correspondant, en supposant qu'on prenne pour unité d'angle plan celui qui correspond à l'unité d'angle dièdre; c'est ainsi qu'on doit entendre l'énoncé du théorème qu'il fallait démontrer.

On prend ordinairement, pour unité d'angle dièdre, l'angle dièdre droit; alors l'unité d'angle plan est l'angle plan droit (liv. I, 19, cor. 1).

REMARQUE 1. On prouverait de même que *tout angle trièdre birectangle a pour mesure son troisième angle plan*, en supposant qu'on prenne pour unité d'angle plan le troisième angle de l'angle solide birectangle pris pour unité. Ordinairement, on prend pour unité d'angle solide l'angle trirectangle; alors l'unité d'angle plan est l'angle plan droit.

REMARQUE 2. Les angles trièdres birectangles $OAEF$, $OBEF$, formés par un plan EOF perpendiculaire à l'arête AB d'un angle dièdre $CABD$, sont égaux entre eux et leur grandeur est la même quelle que soit la position de leur sommet commun O sur l'arête AB (liv. II, 6); d'ailleurs tout plan GOH oblique à l'arête AB , forme avec les plans ABC , ABD deux



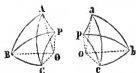
angles trièdres adjacents $OAGH$, $OBGH$ dont la somme est égale à celle des deux angles solides birectangles $OAEF$, $OBEF$; donc la somme des deux angles trièdres $OAGH$, $OBGH$ est double de l'angle trièdre $OAEF$, qui a pour mesure son troisième angle plan EOF (rem. 1); donc enfin la somme des angles trièdres $OAGH$, $OBGH$ formés par un plan GOH qui coupe, comme on voudra, l'arête d'un angle dièdre, a pour mesure le double de l'angle plan correspondant à cet angle dièdre ou, autrement, le rapport de cette somme à l'angle solide trirectangle est égal au rapport du double de l'angle, correspondant à l'angle dièdre, à l'angle plan droit.

REMARQUE 3. Soient F et F' deux fuseaux, pris sur la même sphère ou sur des sphères égales, A et A' leurs angles: on aura $F:F'::A:A'$ (12, rem.); de plus, si l'on suppose que F' soit le fuseau droit ou le quart de la surface de la sphère (déf. 3), A' sera l'angle plan droit: donc, en désignant par t le triangle sphérique trirectangle qui est égal à la huitième partie de la surface de la sphère, et par D l'angle plan droit, la proportion précédente deviendra $F:2t::A:D$ ou $F:t::2A:D$. Donc un fuseau sphérique a pour mesure le double de son angle, en supposant qu'on prenne pour unité de surface le triangle trirectangle et l'angle plan droit pour unité d'angle.

REMARQUE 4. On prouverait de même qu'un onglet sphérique a pour mesure le double de l'angle plan correspondant à son angle, en supposant qu'on prenne pour unité d'espace la pyramide trirectangle ou la huitième partie de la sphère et, pour unité d'angle, l'angle plan droit (12, rem.).

THÉORÈME XIV.

Deux triangles sphériques symétriques, ABC et abc , sont équivalents.



Soit le côté $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$ et P le pôle du petit cercle qui passe par les trois points A, B, C . Menons les arcs PA, PB, PC qui seront égaux entre eux (liv. III, déf. 7) ; faisons l'angle $pab = PAB$; prenons l'arc $ap = AP$ et menons les arcs pb, pc .

Les triangles PAB, pab ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; de plus, l'un d'eux, PAB , est isocèle ; donc ils sont égaux, le côté $PB = pb$ et l'angle $ABP = abp$ (liv. III, 23). Mais l'angle $ABC = abc$; donc $ABC - ABP = abc - abp$, ou $CBP = cbp$; donc les triangles PBC, pbc ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; d'ailleurs l'un d'eux, PBC , est isocèle ; donc ils sont égaux et le côté $PC = pc$; donc les triangles PAC, pac ont les trois côtés égaux chacun à chacun ; d'ailleurs $PA = PC$ par hypothèse, donc le triangle $PAC = pac$ (liv. III, 25) ; donc $PAB + PBC - PAC = pab + pbc - pac$ ou, autrement, le triangle ABC est équivalent à abc .

REMARQUE. Il en serait de même si le pôle P tombait dans le triangle ABC ; car alors les triangles ABC, abc seraient décomposables en trois triangles égaux chacun à chacun.

COROLLAIRE 1. Soient O et o les centres des sphères égales sur lesquelles sont situés les triangles ABC, abc . Les pyramides sphériques $OABP$ et $oabp$, $OBCP$ et $obcp$, $OACP$ et $oacp$ sont égales chacune à chacune (liv. III, 22, rem.) ; donc $OABP + OBCP - OACP = oabp + obcp - oacp$; donc deux pyramides triangulaires sphériques $OABC, oabc$, symétriques l'une de l'autre, sont équivalentes.

COROLLAIRE 2. On prouverait de même que deux angles trièdres symétriques $OABC, oabc$ sont équivalents (liv. III, 22).

COROLLAIRE 3. Deux polygones sphériques symétriques, de tant de côtés qu'on voudra, sont équivalents. Car ils sont décomposables en un même nombre de triangles symétri-

ques deux à deux. Il en est de même de deux pyramides sphériques symétriques, et de deux angles polyèdres symétriques, de tant de faces qu'on voudra.

THÉORÈME XV.

Lorsque deux grands cercles $ABab$, $ACac$ se coupent dans un hémisphère $ABCbc$, la somme de deux triangles ABC , Abc , qui ont un angle opposé au sommet, a pour mesure le double de cet angle.



En effet, les triangles Abc , aBC , correspondants aux angles trièdres $OAbc$, $OaBC$ opposés au sommet, sont symétriques (liv. III, déf. 24) et, par suite, équivalents (14). Mais la somme des triangles ABC , aBC , qui composent le fuseau $ABaC$, a pour mesure le double $2A$ de l'angle du fuseau (13, rem. 3) ou, autrement, on a la relation $\frac{ABC + aBC}{t}$

$= \frac{2A}{D}$, en désignant par t le triangle trirectangle et par D l'angle plan droit. Remplaçant aBC par Abc , il vient $\frac{ABC + Abc}{t} = \frac{2A}{D}$, ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. On prouverait de même que la somme des deux pyramides $OABC$, $OAbc$ a pour mesure $2A$ ou, autrement, qu'on a la relation $\frac{OABC + OAbc}{p} = \frac{2A}{D}$, p étant la pyramide trirectangle; et que la somme des deux angles trièdres $OABC$, $OAbc$ a pour mesure $2A$ ou qu'on a $\frac{OABC + OAbc}{s} = \frac{2A}{D}$, s désignant l'angle solide trirectangle.

THÉORÈME XVI.

Tout triangle sphérique ABC a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.



Achevons la circonférence de grand cercle BCED, qui partage la surface de la sphère en deux parties égales (liv. III, 5); puis prolongeons les côtés BA, CA jusqu'à la rencontre de cette circonférence aux points D et E. La somme des triangles ABC, ADE a pour mesure le double de l'angle A du triangle ABC (15), ou, autrement,

$$\begin{aligned}
 (1) \frac{ABC + ADE}{t} &= \frac{2A}{D}; \text{ on a d'ailleurs } (2) \frac{ABC + ACE}{t} \\
 &= \frac{2B}{D} \text{ et } (3) \frac{ABC + ABD}{t} = \frac{2C}{D} \text{ (13, rem. 3); faisant la} \\
 &\text{somme des égalités (1), (2), (3) et observant que la moitié de} \\
 &\text{la surface de la sphère est égale à } \frac{4t}{2}, \text{ il vient } \frac{2ABC + 4t}{t} \\
 &= \frac{2A + 2B + 2C}{D}, \text{ ou } \frac{ABC}{t} + 2 = \frac{A + B + C}{D}, \text{ ou enfin } \frac{ABC}{t} \\
 &= \frac{A + B + C - 2D}{D}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}
 \end{aligned}$$

REMARQUE. On prouverait de même que toute pyramide triangulaire sphérique OABC a pour mesure l'excès de la somme des angles de sa base sur deux angles droits ou, autrement, qu'on a $\frac{OABC}{p} = \frac{A + B + C - 2D}{D}$; et que tout angle trièdre OABC a pour mesure l'excès de la somme des angles du triangle correspondant sur deux angles droits ou qu'on a $\frac{OABC}{s} = \frac{A + B + C - 2D}{D}$ (15, rem. et 13, rem. 4 et 2).

THÉORÈME XVII.

Tout polygone sphérique ABCDE a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux.



En effet, chacun des triangles ABC, ACD, ADE, dont se compose le polygone proposé, a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux droits (16); donc la somme de tous ces triangles, ou le polygone ABCDE, a pour mesure l'excès de la somme des angles des triangles ou de la somme des angles du polygone sur autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles ou de côtés moins deux dans le polygone.

REMARQUE 1. On peut substituer aux angles A, B, C, etc., du polygone les arcs correspondants à ces angles, pourvu qu'on remplace deux angles droits par une demi-circonférence, ce qui donne lieu à cet autre énoncé : *tout polygone sphérique a pour mesure l'excès de la somme des arcs correspondants à ses angles sur autant de fois une demi-circonférence qu'il a de côtés moins deux.*

REMARQUE 2. On prouverait de même que toute pyramide sphérique OABCDE a pour mesure l'excès de la somme des angles de sa base sur autant de fois deux droits que cette base a de côtés moins deux, et que tout angle polyèdre OABCDE a pour mesure l'excès de la somme des angles du polygone correspondant sur autant de fois deux droits que ce polygone a de côtés moins deux.

COROLLAIRE 1. Deux pyramides P et P', situées dans la même sphère ou dans des sphères égales, sont entre elles comme leurs bases B et B'. Car on a $P : p :: H - 2D \times (n-2) : D$ et $B : b :: H - 2D (n-2) : D$, en désignant par n le nom-

bre des côtés de la base B et par H la somme de ses angles. On en déduit $P : p :: B : t$; on a de même $P' : p :: B' : t$; donc $P : P' :: B : B'$.

COROLLAIRE 2. On prouverait de même que *deux angles solides S et S' au centre de la même sphère ou de sphères égales sont entre eux comme les polygones correspondants.*

LIVRE V.

LA MESURE DES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

1. Le *volume* d'un corps est le rapport de son *étendue* à celle du corps pris pour unité.

Ainsi, en supposant qu'on prenne, pour unité d'espace, le cube dont le côté est un mètre, lorsqu'un corps, de forme quelconque, contient douze fois la dixième partie du mètre cube, le volume de ce corps est égal au nombre 1, 2.

2. La *section droite* d'un prisme est la section, faite dans le prisme, par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales.

3. Le *produit* d'une surface par une ligne est le produit de l'aire de la surface par la longueur de la ligne (g. pl. liv. v, déf. 2 et 1).

4. Un *tronc de prisme* est la partie d'un prisme, comprise entre la base et la section faite par un plan non parallèle à la base.

5. Cette base et la section sont les *bases* du tronc.

6. Un *tronc de pyramide* est la partie d'une pyramide, comprise entre la base et la section faite par un plan quelconque.

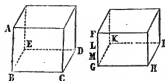
7. La base de la pyramide et la section sont les *bases* du tronc.

8. La *hauteur* d'un tronc de pyramide, à bases parallèles, est la distance des deux bases.

THÉORÈME PREMIER.

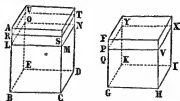
Deux parallélépipèdes rectangles de même base sont

entre eux comme leurs hauteurs ou, autrement, deux parallélépipèdes rectangles, qui ont deux dimensions égales chacune à chacune, sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions.



Soient les parallélépipèdes rectangles $ABCDE$, $FGHIK$, qui ont la base $BCDE = FGHK$; on aura la proportion $ABCDE : FGHK :: AB : FG$.

Supposons d'abord que les hauteurs AB , FG soient commensurables et qu'on ait, par exemple, $AB : FG :: 4 : 3$. Divisons FG en trois parties FL , LM , MG égales entre elles, et portons FL sur AB autant de fois que cela est possible : en vertu de la supposition, FL sera contenue exactement quatre fois dans AB . Cela étant, si dans chacun des parallélépipèdes, on mène, par tous les points de division, des plans parallèles aux bases, on décomposera le parallélépipède $FGHIK$ en trois parallélépipèdes égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur (liv. II, 26, cor. 1); le parallélépipède $ABCDE$ contiendra quatre de ces mêmes parallélépipèdes; donc on aura la proportion $ABCDE : FGHK :: 4 : 3$ ou $:: AB : FG$.



En second lieu, si les hauteurs AB , FG sont incommensurables, on aura encore la proportion $ABCDE : FGHK :: AB : FG$.

Observons d'abord que si l'on a $FG < AB$, on aura de même $FGHIK < ABCDE$. Car, si l'on prend $BL = FG$ et qu'on mène le plan $LMNO$ parallèle à $BCDE$, on aura $LBCDE = FGHK$; or $LBCDE < ABCDE$, donc $FGHIK < ABCDE$.

Cela étant, divisons FG , par exemple en 5 parties FP , PQ ... égales entre elles; portons FP sur AB autant de fois qu'elle peut y être contenue, six fois par exemple, avec un reste $AR < FP$; si, par tous les points de division, on mène des plans parallèles aux bases, le parallélépipède $FGHIK$ sera décomposé en 5 parallélépipèdes égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur; le parallélépipède $ABCDE$ contiendra 6 de ces parallélépipèdes partiels, avec un reste $ARSTU < FPVXY$, puisque l'on a $AR < FP$; donc le parallélépipède $ABCDE$ contient la cinquième partie de $FGHIK$ autant de fois que la hauteur AB contient la cinquième partie de la hauteur FG ; or le nombre 5 des divisions de la hauteur FG a été pris arbitrairement; donc le parallélépipède $ABCDE$ contient une partie aliquote de $FGHIK$, aussi petite qu'on voudra, autant de fois que la hauteur AB contient la même partie aliquote de FG ; donc $ABCDE : FGHIK :: AB : FG$.

THÉORÈME II.

Deux parallélépipèdes rectangles P et P' , qui ont une dimension égale, sont entre eux comme les produits de leurs autres dimensions ou, autrement, deux parallélépipèdes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

1° Soient a, b, c les trois dimensions du parallélépipède P ; a, b', c' celles du parallélépipède P' : on aura $P : P' :: b \times c : b' \times c'$.

Concevons un troisième parallélépipède rectangle P'' dont les trois dimensions soient a, b, c' . Les parallélépipèdes P et P'' , ayant deux dimensions égales chacune à chacune, sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions (1), et on a $P : P'' :: c : c'$; pareillement, les parallélépipèdes P'' et P' , ayant deux dimensions égales chacune à chacune, on a $P'' : P' :: b : b'$. Faisant le produit de ces deux proportions, et

supprimant le facteur P'' commun aux deux premiers termes de la proportion résultante, il vient $P : P' :: b \times c : b' \times c'$.

2^o Soient B et B' les bases des parallélépipèdes P et P' dont a est la hauteur commune. On a $B : B' :: b \times c : b' \times c'$ (g. pl. liv. v, 2); cette proportion et la précédente ayant un rapport commun, il vient $P : P' :: B : B'$.

REMARQUE. Dans les proportions $P : P'' :: c : c'$, $P'' : P' :: b : b'$, $P : P' :: b \times c : b' \times c'$, on peut supposer indifféremment que P , P' , P'' sont des solides ou des nombres qui expriment les rapports de ces solides à celui qu'on prend pour unité; mais, lorsqu'on multiplie entre elles les deux premières pour en déduire la troisième, on admet tacitement que P , P' , P'' désignent les volumes (déf. 1) des solides que l'on considère, sans quoi les produits $P \times P''$, $P'' \times P'$ n'auraient aucune signification.

THÉORÈME III.

Deux parallélépipèdes rectangles quelconques P et P' sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs ou comme les produits de leurs trois dimensions.

1^o Soient B et B' les bases des parallélépipèdes P et P' , H et H' leurs hauteurs : on aura $P : P' :: B \times H : B' \times H'$.

Concevons un troisième parallélépipède rectangle P'' qui ait B pour base, et H' pour hauteur. P et P'' , ayant même base B , on a $P : P'' :: H : H'$ (1); pareillement, P'' et P' , ayant même hauteur H' , on a $P'' : P' :: B : B'$ (2). Faisant le produit de ces deux proportions, et supprimant le facteur P'' commun aux deux premiers termes de la proportion résultante, il vient $P : P' :: B \times H : B' \times H'$.

2^o Soient a , b , c les trois dimensions du parallélépipède P , et a' , b' , c' celles de P' . Si l'on pose $H = a$, $H' = a'$, on aura $B = b \times c$, $B' = b' \times c'$ (g. pl. liv. v, 3), et la proportion précédente deviendra $P : P' :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'$.

THÉORÈME IV.

Le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur ou au produit de ses trois dimensions.

1° Soient P et P' deux parallélépipèdes rectangles, B et B' leurs bases, H et H' leurs hauteurs. On a, par le théorème précédent, $P : P' :: B \times H : B' \times H'$.

Cela étant, si l'on suppose que P' soit le cube dont le côté est égal à l'unité linéaire, et qu'on prenne ce cube pour unité d'espace et sa base pour unité de superficie, chacun des nombres B', H' sera égal à l'unité, et la proportion précédente deviendra $P : P' :: B \times H : 1 \times 1$, d'où l'on déduit $(P : P') = B \times H$. Donc *le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unités d'espace et de superficie le cube et le carré dont les côtés sont égaux à l'unité linéaire.*

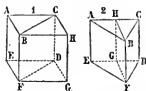
2° Soient a, b, c les trois dimensions du parallélépipède P. Si l'on pose $H = a$, on aura $B = b \times c$ (g. pl. liv. v, 3) : substituant ces valeurs de H et B dans l'égalité $(P : P') = B \times H$, il vient $(P : P') = a \times b \times c$. Donc *le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions, lorsqu'on prend pour unité d'espace le cube dont le côté est égal à l'unité linéaire.*

REMARQUE. Supposons, par exemple, que la base d'un parallélépipède rectangle contienne 4 mètres carrés 8 décimètres carrés et que sa hauteur soit égale à 7 mètres 6 décimètres. Si l'on prend le mètre cube pour unité d'espace, le volume du parallélépipède proposé sera $4,08 \times 7,6$ ou 31,008; c'est-à-dire qu'il contiendra 31 mètres cubes, plus 8 millièmes de mètre cube ou, ce qui revient au même, 31 mètres cubes plus 8 décimètres cubes. Car si l'on coupoit la base du mètre cube divisée en 100 décimètres carrés (g. pl. liv. v, 3, rem.), et qu'on mène, par chaque point de

division, une parallèle à la hauteur jusqu'à la rencontre de la face opposée, on décomposera ainsi le solide en 100 parallélépipèdes rectangles d'un décimètre carré de base et d'un mètre de hauteur : ensuite, si l'on divise une arête latérale en dix parties égales, et qu'on mène, par tous les points de division, des plans parallèles à la base, on décomposera chacun des 100 parallélépipèdes partiels en dix autres parallélépipèdes rectangles ayant un décimètre carré de base et un décimètre de hauteur. Donc le mètre cube sera divisé en 100×10 ou 1000 décimètres cubes; ce qui montre qu'un décimètre cube est la millièème partie d'un mètre cube. On verrait de même qu'un centimètre cube est la millionième partie d'un mètre cube, et qu'un millimètre cube en est la billionième partie; ainsi, lorsqu'on prend le mètre cube pour unité, un solide, dont le volume est $1,42356789\frac{1}{2}$, contient un mètre cube, plus 423 décimètres cubes, plus 567 centimètres cubes, plus $89\frac{1}{2}$ millimètres cubes.

THÉOREME V.

**Tout prisme triangulaire droit ABCDEF a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*



Supposons d'abord (fig. 1) que la base DEF du prisme proposé soit un triangle rectangle en E, et achevons le parallélépipède rectangle AG. Les deux prismes triangulaires droits ABCDEF, BHCDGF

sont égaux, comme ayant des bases égales et même hauteur BF (liv. II, 26, cor. 1); donc chacun d'eux est la moitié du parallélépipède; mais ce parallélépipède a pour mesure le produit $EFGD \times BF$ de sa base par sa hauteur ($\frac{1}{2}$); donc le prisme ABCDEF a pour mesure $\frac{1}{2} EFGD \times BF$ ou $DEF \times BF$.

En second lieu, supposons que la base DEF (fig. 2) ne soit pas un triangle rectangle. Du sommet F du plus grand des trois angles D , E , F abaissons la perpendiculaire FG sur DE ; puis, conduisons le plan $BFGH$ qui décompose le prisme proposé en deux prismes triangulaires droits dont les bases FGE , FGD sont des triangles rectangles. En vertu de ce qui précède, le prisme $ABHGEF$ a pour mesure le produit $GEF \times BF$ de sa base par sa hauteur; pareillement, le prisme $HBCDGF$ a pour mesure le produit $DGF \times BF$; donc le prisme total $ABCDEF$ a pour mesure $(GEF + DGF) \times BF$, ou $DEF \times BF$.

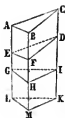
COROLLAIRE. *Tout prisme droit $ABCDEFGH$ a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*



Car, si l'on mène les plans $GACI$, $GADK$ qui décomposent le solide en prismes triangulaires, les prismes partiels auront pour mesures respectives les produits $GHI \times AG$, $GIK \times AG$, $FGK \times AG$; donc le prisme total a pour mesure le produit $FGHIK \times AG$ de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME VI.

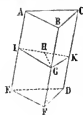
Tout prisme oblique $ABCDEF$ est équivalent au prisme droit qui a, pour base, la section droite du premier et, pour hauteur, son arête latérale.



Prenons, sur le prolongement de AE , un point G tel que, si l'on mène un plan GHI perpendiculaire sur AE , le prisme proposé soit situé tout entier d'un même côté de ce plan; prolongeons AG d'une quantité $GL = AE$; puis, menons le plan LMK parallèle au plan GHI : le prisme droit $GHIKLM$ est équivalent au prisme oblique $ABCDEF$.

En effet, on a, par construction, $GL = AE$; ajoutant EG de part et d'autre, il vient $EL = AG$; on a de même $FM = BH$, $DK = CI$. Cela étant, plaçons la figure $EFDKLM$ sur la figure $ABCIGH$, de manière que la base LMK coïncide avec la base GHI (liv. II, 25); la droite LE , perpendiculaire au plan LMK , coïncidera avec la droite GA perpendiculaire au plan GHI (liv. I, 10), et le point E tombera au point A ; on prouverait de même que le point H tombera au point B et le point I au point C ; donc le solide $EFDKLM$ coïncidera avec $ABCIGH$; donc ces deux solides sont égaux; donc, en leur ôtant la partie commune $EFDIGH$, on aura le prisme oblique $ABCDEF$ équivalent au prisme droit $GHIKLM$.

COROLLAIRE 1. *Tout prisme oblique a pour mesure le produit de sa section droite par son arête latérale (5).* -



COROLLAIRE 2. *Tout prisme triangulaire ABCDEF a pour mesure la moitié du produit $ACDE \times GH$ d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée. Car soit GIK la section droite du prisme et V son volume. On a $V = GIK \times AE$ (cor. 1); or $GIK = \frac{1}{2} IK \times GH$ (g. pl. liv. V, 5); donc $V = \frac{1}{2} AE \times IK \times GH = \frac{1}{2} ACDE \times GH$ (g. pl. liv. V, 6).*

THÉORÈME VII.

Tout prisme triangulaire oblique ABCDEF a pour mesure le produit $DEF \times AH$ de sa base par sa hauteur.



Achevons le parallélogramme $DEFG$ et menons AD , BG . Les prismes triangulaires $ABCDEF$, $AEDGBF$ ont une face latérale commune $AEFB$; de plus, les arêtes DG , CD , opposées à cette face, sont situées dans un même

plan CDG parallèle au plan AEFB (liv. I, 6); donc elles sont également distantes de ce dernier plan (liv. I, 30, cor. 1); donc les deux prismes triangulaires ont la même mesure (6, cor. 2) et sont équivalents: or le prisme AEDGFB a aussi pour mesure le produit $\frac{1}{2}$ DEFG $\times$ AH (6, cor. 2), ou DEF $\times$ AH; donc il en est de même du prisme proposé.

THÉORÈME VIII.

Tout parallélépipède, et en général un prisme quelconque, a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Car un prisme quelconque peut être décomposé en autant de prismes triangulaires de même hauteur, qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone qui lui sert de base (5, cor.). Or chaque prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (7), donc le prisme total a pour mesure la somme des bases de ces prismes partiels multipliée par la hauteur commune ou, autrement, le produit de sa base par sa hauteur.

COROLLAIRE 1. *Tous les prismes, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalents.*

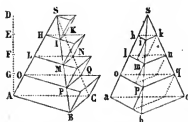
COROLLAIRE 2. *Les deux prismes triangulaires, symétriques l'un de l'autre, dans lesquels se décompose un parallélépipède (liv. II, 35), sont équivalents.* Car ils ont des bases égales et, pour hauteur commune, celle du parallélépipède.

COROLLAIRE 3. *Deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

COROLLAIRE 4. *Deux prismes de base équivalente sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

THÉORÈME IX.

Deux tétraèdres $SABC$, $sabc$, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalents.



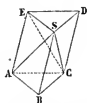
Supposons que les bases équivalentes ABC , abc soient situées dans un même plan, que la droite AD , perpendiculaire à ce plan, soit la hauteur commune des deux tétraèdres, et que

la pyramide $SABC$ ne soit pas moindre que $sabc$. Divisons AD en plusieurs parties DE , EF , etc., égales entre elles; puis, par chacun des points de division E , F , G , menons un plan parallèle à celui des bases. Ces plans couperont les deux pyramides suivant des triangles HIK et $h i k$, LMN et $l m n$, OPQ et $o p q$ équivalents chacun à chacun (liv. IV, 2, cor.). Cela étant, sur les triangles ABC , OPQ , LMN , etc., comme bases inférieures, construisons des prismes saillants $OABC$, $LOPQ$, etc., qui aient une de leurs arêtes latérales dirigée suivant SA , et dont ED soit la hauteur commune. Construisons, ensuite, sous les triangles $h i k$, $l m n$, $o p q$, comme bases supérieures, des prismes intérieurs $l h i k$, $o l m n$, $a o p q$, qui aient une de leurs arêtes latérales dirigée suivant sa , et dont ED soit la hauteur commune. Le premier prisme saillant $SHIK$ et le premier prisme intérieur $l h i k$, ayant la base HIK équivalente à $h i k$ et même hauteur, sont équivalents (8, cor. 1); par la même raison, le second prisme saillant $HLMN$ est équivalent au second prisme intérieur $o l m n$, et ainsi de suite, à l'exception du dernier prisme saillant $OABC$ qui, par conséquent, est la différence entre la somme des prismes saillants et celle des

prismes intérieurs. Or la pyramide $SABC$ est moindre que la somme des prismes saillants et la pyramide $sabc$ est plus grande que celle des prismes intérieurs; donc la différence des deux pyramides est moindre que celle des deux sommes de prismes ou que le prisme $OABC$ dont la hauteur AG et, par suite, le volume (7) peuvent être supposés aussi petits qu'on voudra; donc les pyramides $SABC$, $sabc$ sont équivalentes.

THÉORÈME X.

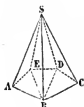
Le volume d'une pyramide triangulaire $SABC$ est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.



Sur la base ABC , construisons un prisme triangulaire $ABCDES$ qui ait une arête latérale SB commune avec la pyramide; puis, menons le plan ESC . Le prisme $ABCDES$ se compose de trois pyramides $SABC$, $SACE$, $SCDE$; les deux dernières ont des bases égales ACE , CDE et, pour hauteur commune, la perpendiculaire abaissée du point S sur le plan $ACDE$; donc elles sont équivalentes (9): il en est de même des deux pyramides $SABC$, $SCDE$, qui ont la base $ABC = DES$ et des hauteurs égales à celle du prisme; donc les trois pyramides sont équivalentes; donc chacune d'elles est le tiers du prisme; or le prisme a pour mesure le produit de sa base ABC par sa hauteur (7); donc la pyramide $SABC$ a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME XI.

Toute pyramide $SABCDE$ a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.



Menons les plans SBD, SBE qui décomposent la pyramide en autant de tétraèdres qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone qui lui sert de base. Chacun de ces tétraèdres a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur (10); donc la pyramide totale a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

COROLLAIRE 1. *Toutes les pyramides, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.*

COROLLAIRE 2. *Toute pyramide est le tiers d'un prisme de base équivalente et de même hauteur (8).*

COROLLAIRE 3. *Deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

COROLLAIRE 4. *Deux pyramides de base équivalente sont entre elles comme leurs hauteurs, et deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

REMARQUE. En général, pour mesurer un polyèdre, on le décompose en pyramides, par exemple en menant des plans de division par un même sommet (liv. II, 33, rem.); on calcule séparément le volume de chaque pyramide; la somme de tous ces volumes partiels est égale au volume du polyèdre proposé.

THÉORÈME XII.

Le volume d'un polyèdre circonscrit à une sphère est égal au tiers du produit de sa surface par le rayon de la sphère inscrite.



Soit le polyèdre ABCD qui touche la sphère aux points M, N, P, etc.; il aura pour mesure $\frac{ABC + ABD + ACD + \text{etc.}}{3}$

$\times OM.$

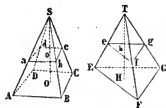
Par le centre O et chacune des arêtes AB, AC, BC... conduisons un plan. Le

polyèdre sera décomposé en autant de pyramides qu'il a de faces, toutes ces pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère inscrite. Mais le rayon OM , mené au point de contact, est perpendiculaire au plan ABC (liv. III, 4); donc la pyramide $OABC$ a pour mesure $\frac{1}{3}ABC \times OM$ (10); par la même raison, la pyramide $OABD$ a pour mesure $\frac{1}{3}ABD \times ON$, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des faces du polyèdre; or $OM = ON = OP$, etc.; donc le polyèdre $ABCD$ a pour mesure $\frac{1}{3}ABC \times OM + \frac{1}{3}ABD \times OM + \text{etc.}$, ou $\frac{ABC + ABD + ACD + \text{etc.}}{3} \times OM$.

• COROLLAIRE. Deux polyèdres, circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales, sont entre eux comme leurs surfaces.

THÉORÈME XIII.

Un tronc $ABCDabcd$ de pyramide quelconque, à bases parallèles, peut être changé en un tronc de pyramide triangulaire équivalent, qui ait même hauteur et des bases équivalentes à celles du premier.

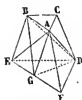


Dans le plan de la base inférieure du tronc, décrivons un triangle EFG équivalent à cette base (g. pl. liv. V, prob. 1); élevons, sur ce plan, une perpendiculaire HT égale à la hauteur OS de la pyramide $SABCD$, et achevons la pyramide triangulaire $TEFG$. La section efg , faite dans cette pyramide par le plan de la base supérieure du tronc, est équivalente à cette base (liv. IV, 2, cor.); d'ailleurs $Hh = Oo$ (liv. I, 30, cor. 1); donc les troncs de pyramide $EFGefg$, $ABCDabcd$ ont même hauteur et des bases équivalentes chacune à chacune: de plus, $OS = HT$, $Oo = Hh$ et, par

suite, $OS = Oo = HT = Hh$, ou $So = Th$; donc les pyramides $Sabcd$, $Tefg$, qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes (11, cor. 1); par la même raison, la pyramide $SABCD$ est équivalente à $TEFG$; donc $SABCD - Sabcd = TEFG - Tefg$ ou, autrement, les troncs de pyramide $ABCDabcd$, $EFGefg$ sont équivalents.

THÉORÈME XIV.

Un tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, et en général un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, est égal à la somme de trois pyramides qui ont, pour hauteur commune, celle du tronc, et, pour bases respectives, la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.



1° Menons les plans ADE, ABD qui décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires ADEF, ABCD, ABDE. La première, considérée comme ayant son sommet en A, a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la base inférieure du tronc. La seconde ABCD, considérée comme ayant son sommet en D, a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la base supérieure du tronc. Quant à la troisième ABDE, si l'on mène AG parallèle à BE jusqu'à la rencontre de EF en G et que l'on conduise le plan GBD, on formera ainsi une pyramide triangulaire GBDE équivalente à ABDE comme ayant la même base BDE et même hauteur (9), puisque les sommets A et G sont situés sur une droite parallèle au plan de la base commune (liv. 1, 30, rem.). Mais cette pyramide GBDE, considérée comme ayant son sommet en B, a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base le trian-

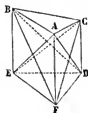
gle DEG ; donc il suffit de prouver que ce triangle est moyen proportionnel entre les bases DEF, ABC. Or les triangles DEF, DEG, ayant le côté commun DE et l'angle commun E, adjacent à ce côté, on a la proportion $DEF : DEG :: EF : EG$ (g. pl. liv. v, 9, rem.), ou $:: EF : AB$ (g. pl. liv. II, 17) ; de plus, les triangles DEG, ABC, ayant le côté $EG = AB$ et l'angle $E = B$, on a de même $DEG : ABC :: DE : BC$; enfin les triangles semblables DEF, ABC donnent $EF : AB :: DE : BC$; donc $DEF : DEG :: DEG : ABC$.

2° Un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles étant équivalent à un tronc de pyramide triangulaire qui a même hauteur et des bases équivalentes à celles du premier (13), le théorème se trouve aussi démontré pour un tronc de pyramide quelconque.

COROLLAIRE. Soient B, b, H les bases et la hauteur du tronc ; son volume sera $\frac{1}{3} H \times (B + b + \sqrt{Bb})$ (10).

THÉORÈME XV.

Un tronc de prisme triangulaire, ABCDEF, est égal à la somme de trois pyramides qui ont, pour base commune, la base inférieure du tronc et, pour sommets respectifs, les sommets A, B, C de la base supérieure.



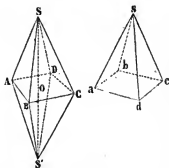
Menons les plans ADE, ABD qui décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires ADEF, ABDE, ABCD. La première a pour base la base inférieure du tronc et pour sommet le point A. La seconde ABDE est équivalente à la pyramide FBDE qui a même base BDE et même hauteur, puisque les sommets A et F sont situés sur une droite parallèle au plan de cette base ; or cette pyramide FBDE peut être considé-

rée comme ayant pour base le triangle DEF et pour sommet le point B; donc il ne reste plus à considérer que la troisième pyramide ABCD. Cette pyramide est équivalente à la pyramide FECD qui a la base ECD équivalente à la base BCD (g. pl. liv. v, 5, cor. 1) et même hauteur, puisque les sommets A et F sont situés sur une droite parallèle au plan des bases. Enfin la pyramide FCDE peut être considérée comme ayant pour base le triangle DEF et pour sommet le point C.

COROLLAIRE. Soit B la base inférieure du tronc et a, b, c les distances des sommets A, B, C au plan de cette base; son volume sera $\frac{1}{3} B \times (a + b + c)$.

THÉORÈME XVI.

Deux pyramides symétriques SABCD, sabcd sont équivalentes.



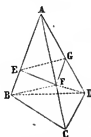
Prolongeons la hauteur SO de la première, d'une quantité $OS' = OS$ et achevons la pyramide $S'ABCD$ qui sera symétrique de SABCD, par rapport au plan de la base commune, et, par suite, égale à $sabcd$ (liv. II, 34); mais les pyramides SABCD, $S'ABCD$ sont équivalentes, comme ayant même

base et des hauteurs égales; donc les deux pyramides SABCD, $sabcd$ sont aussi équivalentes.

COROLLAIRE. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.* Car ils sont décomposables en un même nombre de pyramides symétriques (liv. II, 33, rem.).

THÉORÈME XVII.

Deux tétraèdres $ABCD$, $AEFG$, qui ont un angle solide égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal.



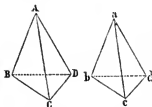
Menons le plan BDF . Les pyramides $ABCD$, $ABDF$, considérées comme ayant pour sommet commun le point B , ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases; donc $ABCD : ABDF :: ACD : ADF$; mais les triangles ACD , ADF , ayant l'angle A commun et le côté commun AD adjacent à cet angle, on a la proportion $ACD : ADF :: AC : AF$ et, par suite, $ABCD : ABDF :: AC : AF$. Les pyramides $ABDF$, $AEFG$, considérées comme ayant pour sommet commun le point F , ont même hauteur et donnent la proportion $ABDF : AEFG :: ABD : AEG$ ou $:: AB \times AD : AE \times AG$ (g. pl. liv. v, 9); faisant le produit des deux dernières proportions et supprimant le facteur $ABDF$ commun aux deux premiers termes de la proportion résultante, il vient $ABCD : AEFG :: AB \times AC \times AD : AE \times AF \times AG$.

COROLLAIRE 1. Deux prismes triangulaires, qui ont un angle solide égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal. Car chacun de ces prismes est triple du tétraèdre qui a, pour arêtes latérales, les trois côtés qui comprennent l'angle égal (10).

COROLLAIRE 2. Deux parallélépipèdes, qui ont un angle solide égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal. Car chacun de ces parallélépipèdes est double du prisme triangulaire construit sur les trois côtés qui comprennent l'angle égal (8, cor. 2).

THÉORÈME XVIII.

Deux tétraèdres semblables $ABCD$, $abcd$ sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.



Soit l'angle $A = a$ et la suite de rapports égaux $AB : ab :: AC : ac :: AD : ad$ (liv. IV, 3). On a, par le théorème précédent, $ABCD : abcd :: AB \times AC \times AD : ab \times ac \times ad$; mais la suite de rapports égaux $AB : ab :: AC : ac :: AD : ad$ donne $AB \times AC \times AD : ab \times ac \times ad :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$; donc, à cause du rapport commun aux deux proportions, il vient $ABCD : abcd :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$.

THÉORÈME XIX.

Deux polyèdres semblables P et P' sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.

Concevons les polyèdres P et P' décomposés en un même nombre de tétraèdres A et A' , B et B' , C et C' , etc., semblables chacun à chacun (liv. IV, 10); et soient a et a' deux côtés homologues dans ces polyèdres.

On a, par ce qui précède (18), $A : A' :: a^3 : a'^3$, $B : B' :: a^3 : a'^3$, $C : C' :: a^3 : a'^3$, etc., d'où l'on déduit $A : A' :: B : B' :: C : C' \dots$ Dans cette suite de rapports égaux, la somme des antécédents ($A + B + C + \text{etc.}$), ou le polyèdre P , est à la somme des conséquents ($A' + B' + C' + \text{etc.}$), ou au polyèdre

P', comme un antécédent A est à son conséquent A' ou comme $a^3 : a'^3$.

REMARQUE. On prouverait de même que *les surfaces de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.*

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES RÉGULIERS

ET LA MESURE DES TROIS CORPS RONDS.

DÉFINITIONS.

1. On appelle *angle solide régulier*, celui qui a tous ses angles dièdres égaux et tous ses angles plans égaux.

2. Un *polyèdre régulier* est celui qui a tous ses angles dièdres égaux, et dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux entre eux.

Ainsi tous les cubes sont des polyèdres réguliers.

3. Le *centre* et le *rayon* d'un polyèdre régulier sont le centre et le rayon de la sphère circonscrite au polyèdre.

4. L'*apothème* d'un polyèdre régulier est le rayon de la sphère inscrite dans le polyèdre.

5. L'angle solide, qui a pour arêtes les rayons menés aux sommets d'une même face d'un polyèdre régulier est un *angle au centre* du polyèdre.

6. Une *pyramide régulière* est celle qui a pour base un polygone régulier et dont toutes les arêtes latérales sont égales entre elles (liv. 1, 31).

REMARQUE. La droite, menée du sommet au centre de la base, est la hauteur de la pyramide.

7. Tout prisme droit, qui a pour base un polygone régulier, est un *prisme régulier*.

8. Un prisme est *inscrit* dans un cylindre, quand ses bases sont inscrites dans celles du cylindre.

Dans le même cas, le cylindre est *circonscrit* au prisme.

9. Un prisme est *circonscrit* à un cylindre, quand ses bases sont *circonscrites* à celles du cylindre.

Dans le même cas, le cylindre est *inscrit* dans le prisme.

10. Une pyramide est *inscrite* dans un cône, lorsqu'elle a même sommet, et que sa base est inscrite dans celle du cône.

Dans le même cas, le cône est *circonscrit* à la pyramide.

11. Une pyramide est *circonscrite* à un cône, quand elle a même sommet, et que sa base est circonscrite à celle du cône.

Dans le même cas, le cône est *inscrit* dans la pyramide.

12. Deux fuseaux ou deux onglets, pris dans des sphères différentes, sont *semblables*, quand ils ont des angles égaux.

13. Deux polygones sphériques, situés sur des sphères différentes, sont *semblables*, quand ils correspondent à des angles au centre, égaux entre eux.

14. Deux pyramides sphériques sont *semblables*, quand elles ont pour bases des polygones semblables.

15. Deux cylindres ou deux cônes sont *semblables*, lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les diamètres des bases.

16. Lorsque deux solides, terminés d'une part, par une même surface plane, sont tels que l'un soit situé entièrement dans l'autre, on dit, en faisant abstraction de cette surface commune, que la surface du second *enveloppe* celle du premier en se terminant à un même contour.

La surface du premier solide est considérée comme un cas particulier de toutes les surfaces *enveloppantes*.

17. Lorsque deux solides sont tels que l'un soit situé entièrement dans l'autre, on dit que la surface du second *enveloppe entièrement* celle du premier.

La surface du premier est considérée comme un cas particulier des surfaces *enveloppantes*.

18. Un *tronc* de cône est la partie d'un cône, comprise entre la base et la section faite par un plan quelconque.

19. La base du cône et la section sont les *bases* du tronc.

20. Le *côté* d'un tronc de cône, à bases parallèles, est la partie d'une génératrice, comprise entre les deux bases.

21. La *hauteur* du tronc est la distance des deux bases.

22. On nomme *secteur sphérique* le solide engendré par un secteur circulaire qui fait une révolution entière autour d'un diamètre mené hors du secteur.

23. La *base* d'un secteur sphérique est la zone décrite par la base du secteur circulaire générateur.

24. Un cylindre est *équilatéral* lorsque sa hauteur est égale au diamètre de sa base.

25. Un cône est *équilatéral* lorsque son côté est égal au diamètre de sa base.

26. Un cylindre est *inscrit* dans une sphère, lorsqu'il a pour bases deux petits cercles de la sphère.

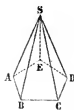
27. Un cône est *inscrit* dans une sphère, lorsque son sommet et la circonférence de sa base sont situés sur la sphère.

28. Un cylindre équilatéral est *circonscrit* à une sphère, lorsqu'il a pour axe un diamètre de la sphère.

29. Un cône équilatéral est *circonscrit* à une sphère, lorsqu'il a pour axe la hauteur d'un triangle équilatéral circonscrit à un grand cercle de la sphère.

THÉORÈME PREMIER.

Lorsqu'on prend sur les arêtes d'un angle solide régulier, à partir du sommet, des droites SA , SB , SC , etc., égales entre elles, les extrémités A , B , C , D , E de toutes ces droites sont situées dans un même plan.



En effet, par hypothèse, tous les triangles SAB , SBC , SCD , etc., sont isocèles et ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle $SBA = SBC = SCB = SCD$, etc.; mais l'angle dièdre $SB = SC$ (déf. 1); donc les angles solides $BA SC$, $CBS D$ ont un angle dièdre égal compris entre deux angles plans égaux chacun à

chacun et, par suite, l'angle dièdre BC du premier est égal à l'angle dièdre CB du second ; donc le plan BCD coïncide avec le plan ABC : on prouverait de même que le plan CDE coïncide avec BCD ; donc tous les points A, B, C, D, E sont dans un même plan.

REMARQUE. Les triangles SAB, SBC, SCD , etc., ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, le côté $AB = BC = CD$, etc. ; de plus, les angles solides A, B, C, D, E ayant un angle dièdre égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, l'angle $EAB = ABC = BCD$, etc. ; donc $ABCDE$ est un polygône régulier.

Cela étant, si l'on conçoit un second angle solide régulier $sabcde$ tel que l'angle plan $asb = ASB$, et qu'on suppose, comme précédemment, $sa = sb = sc$, etc. ; $abcde$ sera un polygône régulier semblable à $ABCDE$ (g. pl. liv. VI, 5) ; les angles solides A et a auront les trois angles plans égaux chacun à chacun et, par suite, l'angle dièdre $SA = sa$; donc deux angles solides réguliers, S et s , qui ont le même angle plan et le même nombre de faces, sont égaux entre eux.

THÉORÈME 11.

On peut construire un tétraèdre régulier dont le côté soit égal à une droite donnée AB .



Décrivons, sur AB , un triangle équilatéral ABC ; par le centre O de ce triangle, menons OD perpendiculaire à son plan ; construisons le triangle rectangle AOD dont l'hypoténuse $AD = AB$ (g. pl. liv. III, prob. 24) ; le tétraèdre $ABCD$ est le solide demandé.

En effet, la droite OD étant perpendiculaire au plan ABC , on a $AD = BD = CD$ (liv. I, 31) $= AB$; donc toutes les faces du tétraèdre sont des triangles équila-

tétraux égaux entre eux; de plus, les angles solides A, B, C, D , ayant les angles plans égaux chacun à chacun, les angles dièdres AB, BC, CD , etc., sont tous égaux entre eux (liv. II, 6); donc le tétraèdre est régulier (déf. 2).

THÉORÈME III.

On peut construire un hexaèdre régulier dont le côté soit égal à une droite donnée AB .



Décrivons, sur AB , un carré $ABCD$; aux points A, B, C, D , élevons, sur le plan de ce carré, des perpendiculaires AF, BG, CH, DE égales à la droite donnée AB : l'hexaèdre $ABCDEFGH$ est le solide demandé.

Car toutes ses faces sont des carrés qui ont pour côté la droite donnée AB , et les angles solides A, B, C, D, E , etc., ayant les angles plans égaux chacun à chacun, tous les angles dièdres AB, BC, BG , etc., sont égaux entre eux.

THÉORÈME IV.

On peut construire un octaèdre régulier dont le côté soit égal à une droite donnée AB .



Décrivons, sur AB , un carré $ABCD$; par le centre O de ce carré, menons la droite EF perpendiculaire à son plan; prenons, de part et d'autre du point O , dans la direction EF , des grandeurs $OE = OF = AO$: l'octaèdre $EABCDF$ est le solide demandé.

En effet, les triangles rectangles AOB, AOE, BOE, AOF , etc., ont un angle égal compris entre

côtés égaux ; donc $AB = AE = BE = AF$, etc. ; donc le solide est compris sous huit triangles équilatéraux égaux entre eux. De plus, les quadrilatères $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ étant des carrés (g. pl. liv. II, 21, cor.), si l'on compare deux angles dièdres quelconques AB , CE , on voit qu'ils sont égaux, comme opposés à des angles plans droits, dans des angles trièdres $ABEF$, $CBDE$ qui ont les trois angles plans égaux chacun à chacun (liv. II, 6) ; donc l'octaèdre $EABCDF$ est régulier.

COROLLAIRE. *Lorsque trois droites égales AC , BD , EF se coupent deux à deux en leur milieu et à angle droit, leurs extrémités A , B , C , D , E , F sont les sommets d'un octaèdre régulier.*

THÉORÈME V.

On peut construire un dodécaèdre régulier dont le côté soit égal à une droite donnée AB .



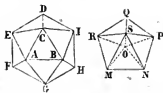
Décrivons, sur AB , un pentagone régulier $ABCDE$; aux points A , B , C , etc., construisons, d'un même côté du plan de ce pentagone, des angles trièdres réguliers $AEOB$, $BAMC$, $CBDK$, etc., (liv. II, 17) : les deux droites AO , BM seront situées dans un même plan ; car les angles trièdres $AEOB$, $BAMC$ ayant les trois angles plans égaux chacun à chacun, l'angle dièdre AB de l'un est égal à l'angle dièdre BA de l'autre ; donc le plan OAB coïncide avec le plan ABM et, par suite, les droites AO , BM sont dans un même plan $OABM$; on prouverait de même que les deux droites BM , CK sont dans un même plan $MBCK$ et ainsi de suite. Cela étant, prenons $AO = BM = CK$, etc., $= AB$ et achevons les pentagones réguliers $ABMNO$, $BCKLM$, etc. Il en résultera une surface continue $ABCDEF GHI...$ composée de six pentagones réguliers égaux et dans laquelle tous les angles dièdres AO , AB , BM , BC , etc., sont

aussi égaux entre eux. De plus, les angles trièdres $AOBE$, $ONAP$, $MNBL$, etc., ayant un angle dièdre égal, compris entre deux angles plans égaux chacun à chacun, les angles plans BAE , NOP , LMN , etc., sont tous égaux entre eux, ainsi que les angles dièdres AB , ON , MN , ML , etc.

Concevons qu'une seconde surface $abcdefghi...$ égale à la première, soit placée de manière que la droite lm coïncide avec FP et l'angle mlk avec PFG : le point k tombera en G et, l'angle dièdre kl de l'angle solide kli étant égal à l'angle dièdre FG de l'angle solide FPG , le plan lki coïncidera avec le plan FGH , l'angle lki avec FGH , et le point i tombera en H ; on voit de même que les points h, g, f, p, o, n tomberont respectivement aux points I, K, L, M, N, O . Il en résulte une surface composée de douze pentagones réguliers égaux et dans laquelle les angles dièdres formés par des faces adjacentes sont égaux entre eux; donc le solide compris sous cette surface est un dodécaèdre régulier.

THÉORÈME VI.

On peut construire un icosaèdre régulier dont le côté soit égal à une droite donnée AB .



Construisons un pentagone régulier $MNPQR$ dont le côté $MN = AB$; par le centre O de ce pentagone, élevons la perpendiculaire OS à son plan; décrivons le triangle rectangle MOS dont l'hypoténuse $MS = MN$, et achevons l'angle solide régulier $SMNPQR$ qui est compris sous cinq triangles équilatéraux.

Décrivons ensuite, sur la droite donnée AB , un triangle équilatéral ABC ; et faisons, d'un même côté du plan de ce triangle, des angles solides $ABCEFG$, $BACIHG$, $CABIDE$ égaux à $SMNPQR$. Il en résulte une surface continue

ABCDEFGH I, composée de dix triangles équilatéraux et dans laquelle chacun des angles plans EFG, FGH, GHI, etc., formés par deux côtés consécutifs de son contour, est égal à l'angle MNP d'un pentagone régulier.

Cela étant, concevons qu'une seconde surface *abcdefghi*, égale à la première, soit placée de manière que le côté *ef* coïncide avec DI et l'angle *efg* avec DIH ; le point *g* tombera en H, le plan *fgh* coïncidera avec le plan IHG et l'angle *fgh* avec l'angle IHG ; donc le point *h* tombera en G ; on voit de même que les points *i* et *d* coïncideront avec les points F et E. On obtient ainsi une surface continue composée de vingt triangles équilatéraux et dans laquelle les angles dièdres formés par des faces adjacentes sont tous égaux entre eux ; donc le solide compris sous cette surface est un icosaèdre régulier.

THÉORÈME VII.

Il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers.

On a vu qu'il existe trois espèces d'angles solides réguliers formés avec des angles de triangles équilatéraux, assemblés trois à trois, quatre à quatre et cinq à cinq (2, 4, 6). Supposons qu'on puisse construire une nouvelle espèce d'angle solide régulier, avec six angles de triangles équilatéraux : la somme de ces angles serait égale à $\frac{2}{3}$ d'angle droit multipliés par 6 ou à 4 angles droits, ce qui ne peut avoir lieu (liv. II, 15). A plus forte raison, est-il impossible de construire un angle solide régulier avec plus de 6 angles égaux à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. On voit, de même, qu'on ne peut construire un angle solide avec plus de trois angles d'un carré ou d'un pentagone régulier : donc il n'existe que cinq espèces d'angles solides réguliers formés avec des angles de polygones équilatéraux (2, 3, 4, 5, 6). Mais deux polyèdres réguliers, qui ont le même angle solide, ont aussi le même nombre de sommets ; car si l'un des polyèdres avait *n* som-

mets ou angles solides de plus que l'autre, la somme de tous les angles plans du premier excéderait celle des angles plans du second de 4π angles droits (liv. II, 29), ce qui est impossible (liv. II, 15). Il en résulte que les deux polyèdres ont la même somme d'angles plans (liv. II, 29), ce qui exige que leurs faces, qui sont des polygones réguliers semblables, soient en même nombre; donc ces deux polyèdres sont de même espèce, et il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers.

THÉORÈME VIII.

Deux polyèdres réguliers de même espèce sont semblables.

En effet, les faces des deux polyèdres, étant des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont semblables (g. pl. liv. VI, 5) : de plus, leurs angles solides, étant réguliers (déf. 1) et ayant leurs angles plans égaux et en même nombre, sont égaux entre eux (1, rem.); donc les deux polyèdres ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et les faces homologues semblables; donc ils sont semblables (liv. 4, déf. 1).

COROLLAIRE. *Deux polyèdres réguliers de même espèce, qui ont un côté égal, sont égaux entre eux* (liv. IV, 10, rem.).

THÉORÈME IX.

Dans tout polyèdre régulier, on peut inscrire une sphère, mais on n'en peut inscrire qu'une.



1° Soient ABC, ABD deux faces adjacentes du polyèdre, EG et FG les perpendiculaires abaissées des centres de ces faces sur le côté commun AB. Le plan EGF est perpendiculaire sur AB et, par suite, sur

chacun des plans ABC , ABD (liv. I, 18) ; donc les perpendiculaires menées à ces plans par les centres E et F , sont situées tout entières dans le plan EGF (liv. I, 20) où elles se rencontrent en un point O (g. pl. liv. I, 14). Les triangles rectangles OEG , OFG ont l'hypoténuse OG commune et le côté $EG=FG$; donc $OE=OF$ et l'angle $EGO=OGF$; donc EGO est la moitié de l'angle plan EGF correspondant à l'angle dièdre AB du polyèdre. Il en résulte qu'en faisant la même construction pour deux faces adjacentes quelconques du polyèdre, on obtiendra un triangle rectangle ego analogue à EOG , dans lequel on aura $eg=EG$, et l'angle $ego=EGO$; donc $oe=OE=OF$, ce qui montre que les perpendiculaires, menées aux centres des faces du polyèdre, se rencontrent en un même point O également distant de toutes ces faces ; donc la sphère décrite du point O comme centre, avec OE pour rayon, passera par les points E , F , e , etc., et sera inscrite dans le polyèdre (liv. III, 4).

2° Supposons qu'on puisse inscrire une seconde sphère dans le même polyèdre. Le centre de cette sphère étant également distant de toutes les faces (liv. III, 4), appartient aux différents plans bissecteurs OAB , OAC , OBC (liv. I, 33) qui se rencontrent en un seul point O ; donc les deux sphères inscrites, ayant même centre et même rayon, ne forment qu'une seule et même sphère.

THÉORÈME X.

A tout polyèdre régulier on peut circonscrire une sphère, mais on n'en peut circonscrire qu'une.



1° Soit O le centre de la sphère inscrite dans le polyèdre (9). Le point O , appartenant à la perpendiculaire OE , est également distant des points A, B, C (liv. I, 31) ; ce même point O , appartenant à la perpendiculaire OF ,

est également distant des points A, B, D, et ainsi de suite ; donc il est également distant de tous les sommets du polyèdre ; donc la sphère décrite, du point O comme centre, avec OA pour rayon, sera circonscrite au polyèdre.

2° Il est d'ailleurs impossible de circonscrire une autre sphère au même polyèdre ; car, par les quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan, on ne peut faire passer qu'une seule sphère (liv. III, 8).

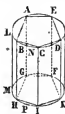
COROLLAIRE 1. *La sphère inscrite dans un polyèdre régulier et la sphère circonscrite sont concentriques.*

COROLLAIRE 2. Toutes les pyramides régulières OABC, OABD, etc. (déf. 6) ayant même base et même hauteur, sont susceptibles de coïncider ; donc *tout polyèdre régulier est décomposable en autant de pyramides régulières égales entre elles qu'il a de faces, chacune de ces pyramides ayant pour sommet le centre du polyèdre et, pour base, une de ses faces.*

COROLLAIRE 3. *L'angle au centre d'un polyèdre régulier est égal au quotient de la division de huit angles solides trirectangles par le nombre des faces du polyèdre.*

THÉORÈME XI.

La surface totale d'un cylindre est plus grande que celle de tout prisme inscrit ABCDEFGHIK.



La surface composée du fuseau ALBHM et des segments ALB, GMH est plus grande que le rectangle ABHG, terminé au même contour (ax. 13) ; pareillement, la surface composée du fuseau BNCIPH et des segments BNC, HPI est plus grande que le rectangle BCIH, et ainsi de suite ; donc la surface latérale du cylindre, augmentée de tous les segments des bases, est plus grande que la surface latérale du prisme : ajoutant, de part et d'autre, les deux bases

du prisme, on a la surface totale du cylindre plus grande que celle du prisme inscrit.

THÉORÈME XII.

La surface totale d'un cylindre est moindre que toute autre surface enveloppante, terminée aux plans des bases.

Il est évident que, parmi toutes les surfaces qui enveloppent la surface totale du cylindre, en se terminant aux plans des bases (déf. 17), il en est au moins une qui n'en admet pas de plus petite qu'elle; donc si l'on prouve que toute surface enveloppante, autre que celle du cylindre, en admet une plus petite qu'elle, il s'ensuivra que la surface du cylindre sera la plus petite de toutes. Par un point pris sur la surface latérale du cylindre, hors de la surface enveloppante, menons un plan tangent (liv. III, 31) qui coupera cette surface suivant une ligne plane et en détachera une partie plus grande que la surface plane terminée au même contour (ax. 13) : en remplaçant cette partie de la surface enveloppante par la surface plane, on obtiendra une autre surface enveloppante plus petite que la première, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE. *La surface totale d'un cylindre est moindre que celle de tout prisme circonscrit.*

THÉORÈME XIII.

La surface latérale d'un prisme droit a pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.

En effet, cette surface est composée de rectangles qui ont pour bases respectives les différents côtés de la base du prisme et, pour hauteur commune, la hauteur du prisme; or chaque rectangle a pour mesure le produit de sa base

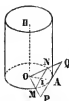
par sa hauteur, donc la somme de tous ces rectangles, ou la surface latérale du prisme, a pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.

REMARQUE. On démontrerait de même que la surface latérale d'un prisme oblique a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.

COROLLAIRE. En ajoutant à la mesure de la surface latérale d'un prisme régulier (déf. 7), le double de l'aire de sa base (g. pl. liv. v, 8), on trouve que la surface totale d'un prisme régulier a pour mesure le produit du périmètre de sa base par la somme de sa hauteur et de l'apothème de cette base.

THÉORÈME XIV.

La surface totale d'un cylindre a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la somme de sa hauteur et du rayon de cette base.



Soient OA et OH le rayon de la base et la hauteur du cylindre. On aura $S = \text{circ. OA} \times (\text{OH} + \text{OA})$, en désignant par S la mesure de la surface totale du cylindre.

Inscrivons et circonscrivons, au cercle OA, deux polygones réguliers semblables, dont MN et PQ soient les côtés; considérons ces polygones comme les bases de deux prismes réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cylindre, et appelons surf. MN et surf. PQ les mesures des surfaces totales de ces prismes. On a (13, cor.) surf. MN = pér. MN $\times$ (OH + OI) et surf. PQ = pér. PQ $\times$ (OH + OA); mais S est comprise entre surf. MN et surf. PQ (11 et 12), ou entre pér. MN $\times$ (OH + OI) et pér. PQ $\times$ (OH + OA); le produit circ. OA $\times$ (OH + OA) est aussi compris (g. pl. liv. vi, 10 et 11) entre pér. MN $\times$ (OH + OI) et pér. PQ $\times$ (OH + OA); de plus, la différence pér. PQ $\times$ (OH + OA) — pér. MN $\times$ (OH + OI)

peut être supposée aussi petite qu'on voudra, puisque les différences (pér. PQ — pér. MN) et $(OH + OA) - (OH + OI)$ ou $(OA - OI)$ sont elles-mêmes aussi petites qu'on voudra (g. pl. liv. VI, 9; et 6, cor.); donc les nombres constants S et circ. $OA \times (OH + OA)$ sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

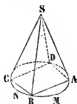
COROLLAIRE 1. Soient R et H le rayon de la base et la hauteur du cylindre : sa surface totale a pour mesure $2\pi R \times (H + R) = 2\pi R H + 2\pi R^2$; or $2\pi R^2$ est la mesure de la somme des bases (g. pl. liv. VI, 14), donc *la surface latérale d'un cylindre a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.*

COROLLAIRE 2. Les surfaces latérales s et s' de deux cylindres semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs ou des rayons des bases. Car, en multipliant entre elles les deux proportions $H : H' :: R : R'$, $2\pi R : 2\pi R' :: R : R'$, il vient $2\pi RH : 2\pi R'H' :: R^2 : R'^2$ ou $s : s' :: R^2 : R'^2$.

COROLLAIRE 3. *Tout fuseau cylindrique F a pour mesure le produit $A \times H$ de sa base par sa hauteur. Car, soit s la surface latérale du cylindre et R le rayon de sa base. On a $F : s :: A : 2\pi R$ (liv. IV, 12, rem.) et, par suite, $F : s :: A \times H : 2\pi R H$; or $s = 2\pi R H$, donc $F = A \times H$.*

THÉORÈME XV.

La surface totale d'un cône est plus grande que celle de toute pyramide inscrite.



La surface composée du fuseau $SAMB$ et du segment AMB est plus grande que le triangle SAB , terminé au même contour (ax. 13); pareillement, la surface composée du fuseau $SBNC$ et du segment BNC est plus grande que le triangle SBC , et ainsi de suite; donc la surface latérale du cône, augmentée de tous les segments de la base, est plus grande que la surface latérale de la pyra-

vide : ajoutant, de part et d'autre, la base de la pyramide, on a la surface totale du cône plus grande que celle de la pyramide inscrite.

THÉORÈME XVI.

La surface totale d'un cône est moindre que toute autre surface enveloppante, terminée au plan de la base.

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 12, on voit qu'il suffit de prouver que toute surface enveloppante, autre que celle du cône, en admet une plus petite qu'elle.

Par un point pris sur la surface latérale du cône, hors de la surface enveloppante, menons un plan tangent (liv. III, 33) qui coupera cette surface suivant une ligne plane et en détachera une partie plus grande que la surface plane terminée au même contour : en remplaçant cette partie de la surface enveloppante par la surface plane, on obtiendra une autre surface enveloppante, plus petite que la première, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE. *La surface totale d'un cône est moindre que celle de toute pyramide circonscrite.*

THÉORÈME XVII.

La surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la hauteur d'une face latérale.

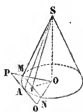
En effet, cette surface est composée de triangles isoscèles (déf. 6), de même hauteur, qui ont pour bases respectives les différents côtés de la base de la pyramide ; or cha-

que triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur, donc la somme de tous ces triangles, ou la surface latérale de la pyramide, a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la hauteur d'une face latérale.

COROLLAIRE. En ajoutant, à la mesure de la surface latérale d'une pyramide régulière, l'aire de sa base, on trouve que la surface totale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par la somme de la hauteur d'une face latérale et de l'apothème de cette base.

THÉORÈME XVIII.

La surface totale d'un cône a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de sa base par la somme de son côté et du rayon de cette base.



Soient OA et SA le rayon de la base et le côté du cône. On aura $S = \frac{1}{2} \text{ circ. OA} \times (SA + OA)$, en désignant par S la mesure de la surface totale du cône.

Inscrivons et circonscrivons, au cercle OA, deux polygones réguliers semblables dont MN et PQ soient les côtés; considérons ces polygones comme les bases de deux pyramides régulières, l'une inscrite et l'autre circonscrite au cône, et appelons surf. MN et surf. PQ les mesures des surfaces totales de ces pyramides. On a (17, cor.) $\text{surf. MN} = \frac{1}{2} \text{ pér. MN} \times (SI + OI)$ et $\text{surf. PQ} = \frac{1}{2} \text{ pér. PQ} \times (SA + OA)$; mais S est comprise entre surf. MN et surf. PQ (15 et 16) ou entre $\frac{1}{2} \text{ pér. MN} \times (SI + OI)$ et $\frac{1}{2} \text{ pér. PQ} \times (SA + OA)$; le produit $\frac{1}{2} \text{ circ. OA} \times (SA + OA)$ est aussi compris entre $\frac{1}{2} \text{ pér. MN} \times (SI + OI)$ et $\frac{1}{2} \text{ pér. PQ} \times (SA + OA)$; de plus, la différence $\frac{1}{2} \text{ pér. PQ} \times (SA + OA) - \frac{1}{2} \text{ pér. MN} \times (SI + OI)$ peut être supposée aussi petite qu'on vou-

dra, puisque les différences $\frac{1}{2}$ (pér. PQ — pér. MN), OA — OI, et SA — SI (g. pl. liv. II, 24) sont elles-mêmes aussi petites qu'on voudra ; donc les nombres constants S et $\frac{1}{2}$ circ. OA $\times$ (SA + OA) sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

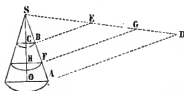
COROLLAIRE 1. Soient R et L le rayon de la base et le côté d'un cône ; sa surface totale a pour mesure $\pi R \times (L + R) = \pi RL + \pi R^2$; or πR^2 est la mesure de sa base, donc la surface latérale d'un cône a pour mesure la moitié du produit de la circonférence de sa base par son côté.

COROLLAIRE 2. Les surfaces latérales de deux cônes semblables sont entre elles comme les carrés des côtés ou des rayons des bases.

COROLLAIRE 3. Un fuseau conique a pour mesure la moitié du produit de sa base par le côté du cône.

THÉORÈME XIX.

La surface latérale d'un tronc de cône, à bases parallèles, a pour mesure le produit de son côté par la demi-somme des circonférences de ses bases ou, autrement, le produit de son côté par la circonférence de la section faite à égale distance des deux bases.



1° Soient OA, CB les rayons des bases et AB le côté du tronc ; on aura surf. lat. $AB = \frac{\text{circ. OA} + \text{circ. CB}}{2}$.

Élevons, sur le côté SA, la perpendiculaire AD équivalente à circ. OA ; joignons le point S au point D et menons BE parallèle à AD : la droite BE est équivalente à circ. CB ; car les triangles semblables SBE, SAD donnent BE : AD :: SB : SA ; on a d'ailleurs circ. CB : circ.

$OA :: CB : OA$ (g. pl. liv. vi, 12) ou $:: SB : SA$; donc $BE : AD :: \text{circ. } CB : \text{circ. } OA$; or $AD = \text{circ. } OA$ par hypothèse, donc $BE = \text{circ. } CB$. Mais la surface latérale du cône SO a pour mesure $\frac{1}{2} \text{ circ. } OA \times SA$ (18, cor. 1) ou $\frac{1}{2} AD \times SA$; le triangle rectangle SAD a aussi pour mesure $\frac{1}{2} AD \times SA$ (g. pl. liv. v, 4); donc la surface latérale du cône est équivalente au triangle SAD ; on prouverait de même que la surface latérale du cône SC est équivalente au triangle SBE ; donc la différence des surfaces latérales des deux cônes est égale à la différence des triangles SAD , SBE ou, autrement, la surface latérale du tronc est équivalente au trapèze $ADEB$; donc ces deux surfaces ont pour mesure commune $AB \times \frac{AD + BE}{2}$.

(g. pl. liv. v, 7) ou $AB \times \frac{\text{circ. } OA + \text{circ. } CB}{2}$.

2° Par le point F , milieu de AB , menons un plan perpendiculaire à l'axe et la droite FG parallèle à AD . On prouverait, comme précédemment, que FG est équivalente à $\text{circ. } FH$; or le trapèze $ADEB$ a pour mesure $AB \times FG$; donc la surface latérale du tronc a aussi pour mesure $AB \times FG$ ou $AB \times \text{circ. } FH$.

COROLLAIRE. Soient R et r les rayons des bases et L le côté d'un tronc de cône; sa surface latérale a pour mesure $\pi L \times (R + r)$.

THÉORÈME XX.

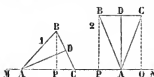
La surface engendrée par la base d'un triangle isoscèle ABC , qui fait une révolution entière autour d'une droite MN , menée par son sommet, dans son plan, et hors du triangle, a pour mesure la projection PQ de sa base sur l'axe, multipliée par la circonférence qui a pour rayon, sa hauteur AD .



Il s'agit de prouver qu'on a surf. $BC = PQ \times 2\pi AD$, en désignant par surf. BC l'aire de la surface dont BC est la génératrice.

La droite BC , faisant une révolution entière autour de MN , décrit la surface latérale d'un tronc de cône dont BP et CQ sont les rayons des bases; donc surf. $BC = BC \times 2\pi DE$ (19) : cela étant, menons CF perpendiculaire à BP ; les triangles BCF , ADE , ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, donnent $BC : AD :: CF$ ou $PQ : DE$; donc $BC \times DE = AD \times PQ$; remplaçant $BC \times DE$ par $AD \times PQ$ dans la valeur de surf. BC , il vient surf. $BC = PQ \times 2\pi AD$.

REMARQUE. Un des côtés du triangle ABC (fig. 1) peut



être situé dans la direction de l'axe MN . Alors la droite BC décrit la surface latérale d'un cône dont BP est le rayon de la base; donc

surf. $BC = 2\pi BP \times \frac{1}{2} BC$ (18, cor. 1) $= 2\pi BP \times CD$. Mais les triangles rectangles BPC , ACD , ayant l'angle C commun, sont semblables et leurs côtés homologues donnent la proportion $BP : AD :: CP : CD$, d'où l'on déduit $BP \times CD = AD \times CP$ et, par suite, surf. $BC = CP \times 2\pi AD$.

Enfin, la base du triangle ABC (fig. 2) peut être parallèle à l'axe. Alors BC décrit la surface latérale d'un cylindre dont PQ est la hauteur et dont BP , CQ sont les rayons des bases; donc surf. $BC = 2\pi BP \times PQ$ (14, cor. 1) ou $PQ \times 2\pi AD$.

COROLLAIRE. La surface décrite par la base d'un secteur polygonal régulier $OBCDE$, qui fait



une révolution entière autour d'un diamètre AB du cercle circonscrit, a pour mesure la projection BP de sa base sur l'axe, multipliée par la cir-

conférence du cercle inscrit à cette base. Car, en abaissant les perpendiculaires DQ , CR , sur AB , on a surf. $BC = BR$

$\times \text{circ. OI}$, surf. $CD = RQ \times \text{circ. OI}$, surf. $DE = PQ \times \text{circ. OI}$ et, par suite, surf. $BCDE = (BR + RQ + PQ) \times \text{circ. OI} = BP \times \text{circ. OI}$.

Lorsque le secteur se change en un demi-polygone régulier, la surface décrite par la ligne brisée $AFEDCB$ a pour mesure le diamètre AB multiplié par la circonférence du cercle inscrit au polygone.

THÉORÈME XXI.

Une zone à une base est moindre que toute autre surface enveloppante.

Il suffit de prouver que, parmi les surfaces dont il s'agit, toute surface enveloppante, autre que celle de la zone, en admet une plus petite qu'elle.

Par un point pris sur la zone, hors de la surface enveloppante, menons un plan tangent (liv. III, 4), qui coupera cette surface suivant une ligne plane et en détachera une partie plus grande que la surface plane terminée au même contour : en remplaçant cette partie de la surface enveloppante par la surface plane, on obtiendra une autre surface enveloppante plus petite que la première, ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. On prouverait de même que la surface totale de la sphère est moindre que toute autre surface enveloppante ; et que la surface engendrée par la base d'un secteur polygonal régulier, qui fait une révolution entière autour du diamètre mené par une de ses extrémités, est moindre que toute autre surface enveloppante, terminée au même contour.

THÉORÈME XXII.

Une zone quelconque a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle, et la surface totale de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.



1° Considérons la zone à une base, décrite par l'arc BE qui fait une révolution entière autour du diamètre AB : on aura zone $BE = BF \times 2\pi OB$, BF étant la hauteur de la zone.

Pour le démontrer, inscrivons dans l'arc BE une suite de droites BC, CD, DE égales entre elles; aux milieux des arcs sous-tendus par ces droites, menons des tangentes MN, NP, PQ terminées aux prolongements des rayons OB, OC, OD, OE; abaissons QS perpendiculaire sur AB, OG perpendiculaire sur BC, et concevons que toute la figure fasse une révolution entière autour de AB. On aura surf. BCDE = $BF \times 2\pi OG$ (20, cor.) et surf. MNPQE = $MS \times 2\pi OB + \text{surf. EQ}$; mais zone BE est comprise entre surf. BCDE et surf. MNPQE, qui se terminent au même contour circ. EF (21) ou entre $BF \times 2\pi OG$ et $MS \times 2\pi OB + \text{surf. EQ}$; le produit $BF \times 2\pi OB$ est aussi compris entre $BF \times 2\pi OG$ et $MS \times 2\pi OB + \text{surf. EQ}$; de plus, la différence $(MS \times 2\pi OB + \text{surf. EQ}) - BF \times 2\pi OG$, ou $2\pi \times (MS \times OB - BF \times OG) + \text{surf. EQ}$, peut être supposée aussi petite qu'on voudra; car les différences $OB - OG$, $MS - BF = BM + SF < 2BM$, sont aussi petites qu'on voudra (g. pl. liv. VI, 6 et 7, cor.), et il en est de même (19) de surf. EQ = $\pi EQ \times (QS + EF)$, puisque la droite EQ = BM et que, EF étant constant, QS diminue lorsqu'on double le nombre des droites égales, inscrites dans l'arc BE; donc les nombres constants zone BE et $BF \times 2\pi OB$ sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

Si l'angle BOE était droit ou aigu, la différence $MS - BF$ serait égale à BM ou à $BM - SF$ et, à plus forte raison, aussi petite qu'on voudrait.

2° Considérons la zone à deux bases, engendrée par l'arc CE. On a, par ce qui précède, zone BE = $BF \times 2\pi OB$, zone BC = $BR \times 2\pi OB$; donc zone BE - zone BC = $(BF - BR) \times 2\pi OB$ ou zone CE = $FR \times 2\pi OB$.

3° La surface totale de la sphère, étant composée des

deux zones à une base décrites par les arcs AE et BE, a pour mesure $AF \times 2\pi OB + BF \times 2\pi OB$ ou $AB \times 2\pi OB$; ce qu'on peut d'ailleurs prouver directement.

COROLLAIRE 1. Soit H la hauteur d'une zone et R le rayon de la sphère dont elle fait partie. Cette zone a pour mesure $2\pi RH$.

COROLLAIRE 2. Deux zones, situées sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont entre elles comme leurs hauteurs; et deux zones de même hauteur, situées sur des sphères différentes, sont entre elles comme les rayons des sphères.

COROLLAIRE 3. La surface de la sphère, dont le diamètre $2R = D$, a pour mesure $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2 = \pi D^2$. Ainsi la surface totale de la sphère est quadruple d'un grand cercle ou équivalente au cercle qui a pour rayon le diamètre de la sphère.

COROLLAIRE 4. Les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons.

COROLLAIRE 5. La surface d'un fuseau sphérique a pour mesure le produit de l'arc correspondant à son angle par le diamètre de la sphère. On a $F : S :: a : 2\pi R$ (liv. IV, 12, rem.) et, par suite, $F : S :: a \times 2R : 4\pi R^2$; or $S = 4\pi R^2$, donc $F = a \times 2R$.

COROLLAIRE 6. Deux fuseaux semblables F et F' sont entre eux comme les carrés des rayons. Car soit A l'angle des fuseaux, S et S' les surfaces des sphères sur lesquelles ils sont situés et D l'angle plan droit. On a $A : 4D :: F : S$ (liv. IV, 12, rem.), $A : 4D :: F' : S'$; donc $F : F' :: S : S'$ ou $:: R^2 : R'^2$.

COROLLAIRE 7. Tout triangle sphérique T a pour mesure le produit du rayon de la sphère par l'excès de la somme des arcs a, b, c, correspondants à ses angles, sur une demi-circconférence. Car, t désignant le triangle trirectangle, on a $T : t :: (a + b + c - \pi R) : \frac{1}{2}\pi R$ (liv. IV, 17, rem. 1) ou $:: R \times (a + b + c - \pi R) : \frac{1}{2}\pi R^2$; or $t = \frac{1}{2}\pi R^2$; donc $T = R \times (a + b + c - \pi R)$.

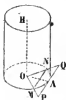
COROLLAIRE 8. On prouverait de même que tout polygone

sphérique a pour mesure le produit du rayon de la sphère par l'excès de la somme des arcs correspondants à ses angles sur autant de fois une demi-circonférence qu'il a de côtés moins deux.

COROLLAIRE 9. Deux polygones sphériques semblables P et P' sont entre eux comme les carrés des rayons. Car, soit A l'angle correspondant aux deux polygones et S l'angle solide trirectangle : on a $A : S :: P : \frac{1}{2} \pi R^2$, $A : S :: P' : \frac{1}{2} \pi R'^2$ (liv. IV, 17, cor. 2) ; donc $P : P' :: R^2 : R'^2$.

THÉORÈME XXIII.

Le volume d'un cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur.



Soit OA le rayon de la base du cylindre et OH sa hauteur : on aura $V = \text{surf. } OA \times OH$, en désignant par V le volume du cylindre et, par $\text{surf. } OA$, l'aire de sa base.

Inscrivons et circonscrivons, au cercle OA , deux polygones réguliers semblables, dont MN et PQ soient les côtés ; considérons ces polygones comme les bases de deux prismes réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cylindre, et appelons $\text{vol. } MN$ et $\text{vol. } PQ$ les volumes de ces prismes. On a $\text{vol. } MN = \text{surf. } MN \times OH$ et $\text{vol. } PQ = \text{surf. } PQ \times OH$ (liv. V, 8) ; or V est évidemment compris entre $\text{vol. } MN$ et $\text{vol. } PQ$, ou entre $\text{surf. } MN \times OH$ et $\text{surf. } PQ \times OH$; le produit $\text{surf. } OA \times OH$ est aussi compris entre les produits $\text{surf. } MN \times OH$ et $\text{surf. } PQ \times OH$, dont la différence $(\text{surf. } PQ - \text{surf. } MN) \times OH$ peut être supposée aussi petite qu'on voudra (g. pl. liv. VI, 9) ; donc les nombres constants V et $\text{surf. } OA \times OH$ sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1. Soient R et H le rayon de la base et la hauteur d'un cylindre ; on aura $V = \pi R^2 H$.

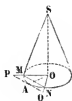
COROLLAIRE 2. Deux cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs et deux cylindres de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

COROLLAIRE 3. Deux cylindres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs.

COROLLAIRE 4. Le volume d'un onglet cylindrique est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME XXIV.

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.



Il s'agit de prouver qu'on a $V = \frac{1}{3} \text{surf. OA} \times \text{SO}$.

Soient MN et PQ les côtés de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle dont OA est le rayon. Considérant ces polygones comme les bases de deux pyramides inscrite et circonscrite au cône, on a $\text{vol. MN} = \frac{1}{3} \text{surf. MN} \times \text{SO}$ et $\text{vol. PQ} = \frac{1}{3} \text{surf. PQ} \times \text{SO}$ (liv. v, 11); or V est évidemment compris entre vol. MN et vol. PQ ou entre $\frac{1}{3} \text{surf. MN} \times \text{SO}$ et $\frac{1}{3} \text{surf. PQ} \times \text{SO}$; le produit $\frac{1}{3} \text{surf. OA} \times \text{SO}$ est aussi compris entre les produits $\frac{1}{3} \text{surf. MN} \times \text{SO}$ et $\frac{1}{3} \text{surf. PQ} \times \text{SO}$, dont la différence $(\text{surf. PQ} - \text{surf. MN}) \times \frac{1}{3} \text{SO}$ peut être supposée aussi petite qu'on voudra; donc les nombres constants V et $\frac{1}{3} \text{surf. OA} \times \text{SO}$ sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1. Soient R et H le rayon de la base et la hauteur d'un cône; on aura $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

COROLLAIRE 2. Deux cônes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et deux cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

COROLLAIRE 3. *Un cône est équivalent à toute pyramide de base équivalente et de même hauteur (liv. V, 11).*

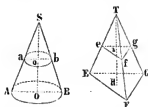
COROLLAIRE 4. *Un cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur (23).*

COROLLAIRE 5. *Deux cônes semblables sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs.*

COROLLAIRE 6. *Le volume d'un onglet conique est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

THÉORÈME XXV.

Un tronc de cône, à bases parallèles, est égal à la somme de trois cônes qui ont, pour hauteur commune, la hauteur du tronc et, pour bases respectives, la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.



Soient OA, oa les rayons des bases et Oo la hauteur du tronc.

Concevons une pyramide $TEFG$ dont la base soit équivalente au cercle OA et dont la hauteur $TH = SO$; supposons, de plus, que la base du

cône et celle de la pyramide soient situées dans un même plan; la section efg , faite dans la pyramide par le plan de la base supérieure du tronc, est équivalente à cette base; car on a $efg : EFG :: \overline{Th}^2 : \overline{TH}^2$ (liv. IV, 1), et cercle oa : cercle $OA :: \overline{oa}^2 : \overline{OA}^2$ (g. pl. liv. VI, 12) ou $:: \overline{So}^2 : \overline{SO}^2$; d'ailleurs $TH = SO$, $Hh = Oo$ et, par suite, $Th = So$; donc $\overline{Th}^2 : \overline{TH}^2 :: \overline{So}^2 : \overline{SO}^2$; donc enfin $efg : EFG ::$ cercle oa : cercle OA ; or $EFG =$ cercle OA , donc $efg =$ cercle oa . Mais le cône SAB et la pyramide $TEFG$ sont équiva-

lents, comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales (24, cor. 3); par la même raison, le cône *Sab* et la pyramide *Tefg* sont équivalents; donc le tronc de cône est équivalent au tronc de pyramide; donc il a pour mesure $\frac{1}{3}EFG \times Hh + \frac{1}{3}efg \times Hh + \frac{1}{3}\sqrt{EFG \times efg} \times Hh$ (liv. v, 14) ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{3}\pi \overline{OA}^2 \times Oo + \frac{1}{3}\pi \overline{oa}^2 \times Oo + \frac{1}{3}\pi OA \times oa \times Oo$.

COROLLAIRE Soient *R* et *r* les rayons des bases d'un tronc de cône et *H* sa hauteur: son volume sera $\frac{1}{3}\pi H \times (R^2 + r^2 + Rr)$.

THÉORÈME XXVI.

Lorsqu'un triangle ABC et un rectangle BCDE, de même base et de même hauteur, font une révolution entière autour de la base commune BC, le solide engendré par le triangle est le tiers du cylindre engendré par le rectangle.



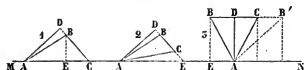
Menons la hauteur *AF* du triangle *ABC*. Le cône engendré par le triangle *ABF* est le tiers du cylindre engendré par le rectangle *AEBF* (24, cor. 4); pareillement, le cône engendré par le triangle *ACF* est le tiers du cylindre engendré par le rectangle *AFC D*; donc la somme des deux cônes, ou le solide engendré par le triangle *ABC*, est le tiers de la somme des deux cylindres ou du cylindre engendré par le rectangle *BCDE*.

Lorsque la hauteur *af* tombe hors du triangle *aBC*, on a cône *Baf* = $\frac{1}{3}$ cyl. *BEaf*, et cône *Caf* = $\frac{1}{3}$ cyl. *CDaf*; donc cône *Baf* — cône *Caf* = $\frac{1}{3}$ (cyl. *BEaf* — cyl. *CDaf*) ou sol. *aBC* = $\frac{1}{3}$ cyl. *BCDE*.

COROLLAIRE. Soient *B* et *H* la base et la hauteur du triangle *ABC*; on aura vol. *ABC* = $\frac{1}{3}\pi H^2 B$ (23).

THÉORÈME XXVII.

Le solide engendré par un triangle quelconque ABC qui fait une révolution entière autour d'une droite MN, menée par son sommet, dans son plan, et hors du triangle, a pour mesure la surface décrite par sa base BC, multipliée par le tiers de sa hauteur AD.



1° Supposons qu'un côté AC (fig. 1) du triangle proposé soit situé dans la direction de l'axe MN, et menons la hauteur BE.

On a $\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} \pi \overline{BE}^2 \times AC$ (26, cor.); or $BE \times AC = BC \times AD$, car chacun de ces produits est le double de l'aire du triangle ABC; donc $\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} \pi BE \times BC \times AD$; mais $\pi BE \times BC = \text{surf. } BC$ (18, cor. 1), donc $\text{vol. } ABC = \text{surf. } BC \times \frac{1}{3} AD$.

2° Supposons que la base BC prolongée (fig. 2) rencontre l'axe MN en un point E. En vertu de ce qui précède (1°), $\text{vol. } ABE = \text{surf. } BE \times \frac{1}{3} AD$ et $\text{vol. } ACE = \text{surf. } CE \times \frac{1}{3} AD$; donc $\text{vol. } ABE - \text{vol. } ACE = (\text{surf. } BE - \text{surf. } CE) \times \frac{1}{3} AD$, ou $\text{vol. } ABC = \text{surf. } BC \times \frac{1}{3} AD$.

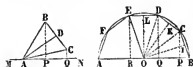
3° Enfin supposons BC (fig. 3) parallèle à MN. Le cône engendré par le triangle ABE est le tiers du cylindre engendré par le rectangle ADBE (24, cor. 4) et, par suite, le solide engendré par le triangle ABD est les deux tiers du même cylindre, de sorte qu'on a $\text{vol. } ABD = \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 \times BD = 2 \pi AD \times BD \times \frac{1}{3} AD = \text{surf. } BD \times \frac{1}{3} AD$ (14, cor. 1); on a de même $\text{vol. } ACD = \text{surf. } CD \times \frac{1}{3} AD$; donc $\text{vol. } ABD + \text{vol. } ACD = \text{surf. } BC \times \frac{1}{3} AD$.

$ACD = (\text{surf. } BD + \text{surf. } CD) \times \frac{1}{3} AD$, ou $\text{vol. } ABC = \text{surf. } BC \times \frac{1}{3} AD$.

Lorsque la hauteur AD tombe hors du triangle proposé ACB' , on a $\text{vol. } ACB' = \text{vol. } ADB' - \text{vol. } ADC = (\text{surf. } DB' - \text{surf. } DC) \times \frac{1}{3} AD = \text{surf. } CB' \times \frac{1}{3} AD$.

THÉORÈME XXVIII.

Le solide engendré par un triangle isocèle ABC , qui fait une révolution entière autour d'une droite MN menée par son sommet, dans son plan, et hors du triangle, a pour mesure la projection PQ de sa base sur l'axe, multipliée par les deux tiers du cercle qui a, pour rayon, sa hauteur AD .



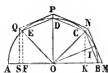
On a, par le théorème précédent, $\text{vol. } ABC = \text{surf. } BC \times \frac{1}{3} AD$; mais $\text{surf. } BC = PQ \times 2\pi AD$ (20), donc $\text{vol. } ABC = PQ \times \frac{2}{3} \pi AD^2$, ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE 1. *Le solide engendré par un secteur polygonal régulier $OBCDE$, qui fait une révolution entière autour d'une droite AB menée par son sommet, dans son plan et hors du secteur, a pour mesure la projection BR de sa base sur l'axe, multipliée par les deux tiers du cercle inscrit à cette base. Car on a $\text{vol. } OBC = BP \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$, $\text{vol. } OCD = PQ \times \frac{2}{3} \pi \overline{OK}^2$, $\text{vol. } ODE = QR \times \frac{2}{3} \pi \overline{OL}^2$; or $OI = OK = OL$, donc $\text{vol. } OBCDE = (BP + PQ + QR) \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2 = BR \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$.*

COROLLAIRE 2. *Le solide engendré par un demi-polygone régulier $ABCDEF$, qui fait une révolution entière autour d'un diamètre AB , a pour mesure le produit de ce diamètre par les deux tiers du cercle inscrit au polygone.*

THÉORÈME XXIX.

Tout secteur sphérique a pour mesure la hauteur de la zone qui lui sert de base, multipliée par les deux tiers d'un grand cercle, et la sphère entière a pour mesure le produit de son diamètre par les deux tiers d'un grand cercle.



1° Considérons le secteur sphérique engendré par le secteur circulaire OBE qui fait une révolution entière autour du diamètre AB; abaissons la perpendiculaire EF sur AB et désignons par vol. OBE le volume du secteur : on aura $\text{vol. OBE} = BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$.

Pour le démontrer, inscrivons dans l'arc BE une suite de droites BC, CD, DE égales entre elles; aux milieux des arcs sous-tendus par ces droites, menons des tangentes MN, NP, PQ terminées aux prolongements des rayons OB, OC, OD, OE; abaissons OI perpendiculaire sur BC, QS perpendiculaire sur AB, et concevons que toute la figure fasse une révolution entière autour de AB : on aura $\text{vol. OBCE} = BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$ et $\text{vol. OMNPQ} = MS \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$ (28, cor. 1); mais vol. OBE est évidemment compris entre vol. OBCE et vol. OMNPQ ou entre $BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$ et $MS \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$; $BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$ est aussi compris entre les produits $BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$ et $MS \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$, dont la différence $\frac{2}{3} \pi \times (MS \times \overline{OB}^2 - BF \times \overline{OI}^2)$ peut être supposée aussi petite qu'on voudra, puisque les différences $MS - BF$ et $\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2$ ou $\frac{1}{4} \overline{BC}^2$ sont elles-mêmes aussi petites qu'on voudra (g. pl. liv. VI, 6); donc les nombres constants vol. OBE et $BF \times \frac{2}{3} \pi \overline{OB}^2$ sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

2° Considérons le secteur sphérique, engendré par le secteur circulaire OCE. *En abaissant la perpendiculaire CK sur AB, on a, par ce qui précède, $\text{vol. OBC} = \text{BK} \times \frac{2}{3} \pi \overline{\text{OB}}^2$ et $\text{vol. OBE} = \text{BF} \times \frac{2}{3} \pi \overline{\text{OB}}^2$; donc $\text{vol. OBE} - \text{vol. OBC} = (\text{BF} - \text{BK}) \times \frac{2}{3} \pi \overline{\text{OB}}^2$, ou $\text{vol. OCE} = \text{KF} \times \frac{2}{3} \pi \overline{\text{OB}}^2$.

3° Enfin, en faisant la somme des volumes des secteurs sphériques OAC, OBC, on démontre que la sphère entière a pour mesure $\text{AB} \times \frac{2}{3} \pi \overline{\text{OB}}^2$, ce qu'on peut d'ailleurs prouver directement.

COROLLAIRE 1. Soit R le rayon d'un secteur sphérique et H la hauteur de la zone qui lui sert de base; son volume sera $\frac{2}{3} \pi R^2 H$ ou $2\pi RH \times \frac{1}{3} R$; or $2\pi RH$ est l'aire de la zone qui sert de base au secteur (22); donc *tout secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon.*

COROLLAIRE 2. Deux secteurs sphériques, pris dans la même sphère ou dans des sphères égales, sont entre eux comme leurs bases.

COROLLAIRE 3. La sphère entière a pour mesure $2R \times \frac{2}{3} \pi R^2$ ou $\frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$, c'est-à-dire le produit de sa surface par le tiers du rayon.

COROLLAIRE 4. Soit $D=2R$ le diamètre d'une sphère; son volume sera $\frac{4}{3} \pi R^3$ ou $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} D^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$.

COROLLAIRE 5. Les sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons.

COROLLAIRE 6. Un onglet sphérique a pour mesure l'arc correspondant à son angle, multiplié par les deux tiers du carré du rayon.

COROLLAIRE 7. Deux onglets semblables sont entre eux comme les cubes des rayons.

COROLLAIRE 8. Toute pyramide sphérique P a pour mesure le produit $\text{B} \times \frac{1}{3} R$ de sa base par le tiers du rayon. Car, en désignant par p la pyramide sphérique trirectangle, on a $P : p :: B : \frac{1}{3} \pi R^2$ (liv. IV, 17, cor 1) et, par suite, $P : p :: B$

$\times \frac{1}{3} R : \frac{1}{6} \pi R^3$; or $p = \frac{1}{6} \pi R^3$, donc $P = B \times \frac{1}{3} R$.

COROLLAIRE 9. *Deux pyramides sphériques semblables P et P' sont entre elles comme les cubes des rayons.* Car soient B et B' leurs bases, R et R' les rayons des sphères dont elles font partie. On a $B : B' :: R^2 : R'^2$ (22, cor. 9) et, par suite, $B \times \frac{1}{3} R : B' \times \frac{1}{3} R' :: R^3 : R'^3$ ou $P : P' :: R^3 : R'^3$.

THÉORÈME XXX.

Le solide engendré par un segment circulaire CMD, qui fait une révolution entière autour d'un diamètre AB situé hors du segment, a pour mesure la projection PQ de sa base sur l'axe, multipliée par le sixième du cercle dont cette base est le rayon.



Il s'agit de prouver que $\text{vol. CMD} = PQ \times \frac{1}{6} \pi \overline{CD}^2$.

Menons les rayons OC, OD et la hauteur OI du triangle isocèle OCD.

On a $\text{vol. OCMD} = PQ \times \frac{2}{3} \pi \overline{OC}^2$ (29)

et $\text{vol. OCD} = PQ \times \frac{2}{3} \pi \overline{OI}^2$ (28); donc $\text{vol. OCMD} - \text{vol. OCD}$, ou $\text{vol. CMD} = PQ \times \frac{2}{3} \pi \times (\overline{OC}^2 - \overline{OI}^2)$; or $\overline{OC}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{CI}^2 = \frac{1}{4} \overline{CD}^2$, donc $\text{vol. CMD} = PQ \times \frac{2}{3} \pi \times \frac{1}{4} \overline{CD}^2 = PQ \times \frac{1}{6} \pi \overline{CD}^2$.

THÉORÈME XXXI.

Tout segment de sphère, à deux bases, a pour mesure la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus le volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre.



Soient EF la hauteur, CE et DF les rayons des bases du segment engendré par une révolution entière de la figure CEFD autour du diamètre AB : on aura

$$\text{vol. CEFD} = \frac{\pi \overline{CE}^2 + \pi \overline{DF}^2}{2} \times EF$$

+ $\frac{1}{8} \pi \overline{EF}^3$ (29, cor. 4). En effet, $\text{vol. CEFD} = \frac{1}{2} \pi EF \times (\overline{CE}^2 + \overline{DF}^2 + CE \times DF)$ (25) et $\text{vol. CMD} = EF \times \frac{1}{8} \pi \overline{CD}^2$ (30); donc $\text{vol. CEFD} = \frac{1}{8} \pi EF \times (2\overline{CE}^2 + 2\overline{DF}^2 + 2CE \times DF + \overline{CD}^2)$; or en menant DG perpendiculaire à CE, le triangle rectangle CDG donne $\overline{CD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{DG}^2 = (CE - DF)^2 + \overline{EF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2 - 2CE \times DF + \overline{EF}^2$; donc $\text{vol. CEFD} = \frac{1}{8} \pi EF \times (3\overline{CE}^2 + 3\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2) = \frac{\pi \overline{CE}^3 + \pi \overline{DF}^3}{2} \times EF + \frac{1}{8} \pi \overline{EF}^3$.

REMARQUE. On prouverait de même que tout segment sphérique, à une base, a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur plus le volume de la sphère dont cette hauteur est le diamètre.

THÉORÈME XXXII.

Les surfaces de la sphère, du cylindre et du cône équilatéraux circonscrits sont entre elles comme les nombres 4, 6, 9 et leurs volumes sont entre eux comme ces mêmes nombres.



1° Soient ABCD, EFG un carré et un triangle équilatéral circonscrits au cercle OH. Concevons que toute la figure, située d'un même côté de la droite EK, fasse une révolution entière autour de cette droite : dans ce mouvement, le demi-cercle HHK engendre une sphère ; le rectangle ABKH,

un cylindre équilatéral circonscrit (déf. 24 et 28); et le triangle rectangle EFK , un cône équilatéral circonscrit (déf. 25 et 29) à la même sphère.

Cela étant, si l'on désigne par S, S', S'' les surfaces totales de la sphère, du cylindre et du cône, on aura $S = 4\pi R^2$ (22, cor. 3), $S' = 2\pi BK \times AB$ (14, cor. 1) $+ 2\pi \overline{BK}^2 = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$, $S'' = \pi FK \times EF$ (18, cor. 1) $+ \pi \overline{FK}^2 = 3\pi \overline{FK}^2 = 9\pi R^2$ (g. pl. liv. vi, prob. 4, rem. 1); donc $S : S' : S'' :: 4 : 6 : 9$.

2° Soient V, V', V'' les volumes de la sphère, du cylindre et du cône. On a $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (29, cor. 3), $V' = \pi R^2 \times 2R$ (23) $= 2\pi R^3$, $V'' = \frac{1}{3}\pi \overline{FK}^2 \times EK$ (24); or $FK = R\sqrt{3}$, $EK = \sqrt{EF^2 - \overline{FK}^2} = \sqrt{12R^2 - 3R^2} = 3R$; donc $V'' = \pi R^2 \times 3R = 3\pi R^3$; donc $V : V' : V'' :: \frac{4}{3} : 2 : 3$ ou $:: 4 : 6 : 9$.

REMARQUE 1. La surface latérale du cylindre est équivalente à la surface totale de la sphère.

REMARQUE 2. La surface totale du cylindre est moyenne proportionnelle entre celles de la sphère et du cône.

REMARQUE 3. Le volume du cylindre est moyen proportionnel entre ceux de la sphère et du cône.

REMARQUE 4. On peut aussi démontrer, d'une manière analogue, que les surfaces de la sphère, du cylindre et du cône équilatéraux inscrits sont entre elles comme les nombres 16, 12, 9 et que leurs volumes sont entre eux comme les nombres 32, $12\sqrt{2}$, 9. Ainsi la surface totale du cylindre est encore moyenne proportionnelle entre celles de la sphère et du cône; et il en est de même de son volume par rapport à ceux des deux autres corps.

ERRATA.

Page 202. REMARQUE. $n-3$, lisez $2n-3$.

FIN.

SBN 608190



91.4.

2.12







— 2710 —



